4th Benelux Mathematical Olympiad

20-22 April 2012 – Namur – Belgium

Problems

Language: ***English***

Problem 1. A sequence a_1, a_2, …, a_n, … of natural numbers is defined by the rule

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

where b_n is the last digit of a_n. Prove that such a sequence contains infinitely many powers of 2 if and only if a_1 is not divisible by 5.

Problem 2. Find all quadruples (a, b, c, d) of positive real numbers such that $abcd = 1$, $a^{2012} + 2012b = 2012c + d^{2012}$ and $2012a + b^{2012} = c^{2012} + 2012d$.

Problem 3. In triangle ABC the midpoint of BC is called M. Let P be a variable interior point of the triangle such that $\angle CPM = \angle PAB$. Let Γ be the circumcircle of triangle ABP. The line MP intersects Γ a second time in Q. Define R as the reflection of P in the tangent to Γ in B. Prove that the length $|QR|$ is independent of the position of P inside the triangle.

Problem 4. Yesterday, $n \geq 4$ people sat around a round table. Each participant remembers only who his two neighbours were, but not which one sat on his left and which one sat on his right. Today, you would like the same people to sit around the same round table so that each participant has the same two neighbours as yesterday (it is possible that yesterday's left-hand side neighbour is today's right-hand side neighbour). You are allowed to query some of the participants: if anyone is asked, he will answer by pointing at his two neighbours from yesterday.

(a) Determine the minimal number $f(n)$ of participants you have to query in order to be certain to succeed, if later questions must not depend on the outcome of the previous questions. That is, you have to choose in advance the list of people you are going to query, before effectively asking any question.

(b) Determine the minimal number $g(n)$ of participants you have to query in order to be certain to succeed, if later questions may depend on the outcome of previous questions. That is, you can wait until you get the first answer to choose whom to ask the second question, and so on.

Time allowed: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points

4th Benelux Mathematical Olympiad

20-22 April 2012 – Namur – Belgium

Problems

Language: ***French***

Problème 1. Une suite a_1, a_2, …, a_n, … de nombres naturels est définie par la règle

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

où b_n est le dernier chiffre de a_n. Prouver qu'une telle suite contient une infinité de puissances de 2 si et seulement si a_1 n'est pas divisible par 5.

Problème 2. Trouver tous les quadruplets (a, b, c, d) de nombres réels strictement positifs tels que $abcd = 1$, $a^{2012} + 2012b = 2012c + d^{2012}$ et $2012a + b^{2012} = c^{2012} + 2012d$.

Problème 3. Dans le triangle ABC, le milieu de BC est noté M. Soit P un point variable à l'intérieur du triangle tel que $\angle CPM = \angle PAB$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABP. La droite MP coupe Γ une deuxième fois en Q. Soit R le symétrique de P par rapport à la tangente à Γ en B. Prouver que la longueur $|QR|$ est indépendante de la position de P à l'intérieur du triangle.

Problème 4. Hier, $n \geq 4$ personnes se sont assises autour d'une table ronde. Chaque participant ne se souvient que de ses deux voisins, mais pas nécessairement lequel était assis à sa gauche et lequel à sa droite. Aujourd'hui, vous voudriez que les mêmes personnes s'assoient autour de la même table ronde de manière que chaque participant ait les mêmes voisins qu'hier (il est possible que le voisin de gauche d'hier soit le voisin de droite aujourd'hui). Vous avez le droit d'interroger certains participants : chaque personne ainsi sollicitée pointera du doigt ses deux voisins d'hier.

(a) Déterminer le nombre minimal $f(n)$ de participants qu'il vous faut interroger pour être certain d'y arriver, si aucune question ne peut dépendre des réponses antérieures reçues. En d'autres termes, vous devez choisir préalablement la liste des personnes que vous comptez interroger avant de poser la moindre question.

(b) Déterminer le nombre minimal $g(n)$ de participants qu'il vous faut interroger pour être certain d'y arriver, si toutes les questions peuvent dépendre des réponses antérieures reçues. En d'autres termes, vous pouvez attendre d'avoir reçu la première réponse avant de poser la deuxième question, et ainsi de suite.

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

4th Benelux Mathematical Olympiad

20-22 April 2012 – Namur – Belgium

Problems

Language: ***Dutch***

Opgave 1. Een rij (strikt) positieve gehele getallen a_1, a_2, a_3, ... voldoet aan

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad \text{voor } n = 1, 2, \ldots$$

waar b_n het laatste (meest rechtse) cijfer is in de decimale schrijfwijze van a_n. Bewijs dat zo'n rij oneindig veel machten van 2 bevat dan en slechts dan als a_1 niet deelbaar is door 5.

Opgave 2. Bepaal alle viertallen (a, b, c, d) van (strikt) positieve reële getallen die voldoen aan de drie voorwaarden $abcd = 1$, $a^{2012} + 2012b = 2012c + d^{2012}$ en $2012a + b^{2012} = c^{2012} + 2012d$.

Opgave 3. In een driehoek $\triangle ABC$ is M het midden van de zijde BC. Binnen de driehoek ligt een variabel punt P zo dat $\angle CPM = \angle PAB$. Zij Γ de omgeschreven cirkel van driehoek $\triangle ABP$ en definieer Q als het tweede snijpunt van de lijn (rechte) MP met Γ. Het spiegelbeeld van P ten opzichte van de raaklijn aan Γ in B noemen we R. Bewijs dat de lengte van het lijnstuk QR onafhankelijk is van de positie van P.

Opgave 4. Gisteren zaten er $n \geq 4$ ridders aan een ronde tafel. Ieder van de ridders heeft alleen onthouden wie zijn twee buren waren, maar niet welke van de twee links van hem zat en welke van de twee rechts. Vandaag willen we deze groep ridders weer zó om de tafel plaatsen dat iedereen dezelfde buren heeft als gisteren (waarbij het mogelijk is dat iemand z'n rechterbuur van gisteren vandaag zijn linkerbuur is). Je mag enkele ridders ondervragen over zijn buren: zo'n ridder zal dan zijn twee buren van gisteren aanwijzen.

(a) Bepaal het minimale aantal ridders $f(n)$ dat je hiervoor naar zijn buren moet vragen, als je je keuze voor een nieuwe ridder om te ondervragen, niet mag laten afhangen van de antwoorden die eerder ondervraagde ridders gegeven hebben. Je moet dus van tevoren een lijst maken met ridders die je wilt ondervragen, voordat je aan het daadwerkelijke ondervragen begint.

(b) Bepaal het minimale aantal ridders $g(n)$ dat je hiervoor naar zijn buren moet vragen, als je je keuze voor een nieuwe ridder om te ondervragen, wel mag laten afhangen van de antwoorden die eerder ondervraagde ridders gegeven hebben. Je mag dus eerst één ridder ondervragen en daarna besluiten wie je als tweede ridder ondervraagt, enzovoorts.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard