9th Benelux Mathematical Olympiad

5–7 May 2017 — Namur, Belgium

Problems

Language: ***English***

Problems are ***not*** *ordered by estimated difficulty.*

Problem 1. Find all functions $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ such that

$$f(xy) \cdot \gcd\Big(f(x)f(y), f(\tfrac{1}{x})f(\tfrac{1}{y})\Big) = xyf(\tfrac{1}{x})f(\tfrac{1}{y})$$

for all $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, where $\gcd(a, b)$ denotes the greatest common divisor of a and b.

Problem 2. Let $n \geqslant 2$ be an integer. Alice and Bob play a game concerning a country made of n islands. Exactly two of those n islands have a factory. Initially there is no bridge in the country. Alice and Bob take turns in the following way. In each turn, the player must build a bridge between two different islands I_1 and I_2 such that:

- I_1 and I_2 are not already connected by a bridge;
- at least one of the two islands I_1 and I_2 is connected by a series of bridges to an island with a factory (or has a factory itself). (Indeed, access to a factory is needed for the construction.)

As soon as a player builds a bridge that makes it possible to go from one factory to the other, this player loses the game. (Indeed, it triggers an industrial battle between both factories.) If Alice starts, then determine (for each $n \geqslant 2$) who has a winning strategy.

(*Note*: It is allowed to construct a bridge passing above another bridge.)

Problem 3. In the convex quadrilateral $ABCD$ we have $\angle B = \angle C$ and $\angle D = 90°$. Suppose that $|AB| = 2|CD|$. Prove that the angle bisector of $\angle ACB$ is perpendicular to CD.

Problem 4. A *Benelux n-square* (with $n \geqslant 2$) is an $n \times n$ grid consisting of n^2 cells, each of them containing a positive integer, satisfying the following conditions:

- the n^2 positive integers are pairwise distinct;
- if for each row and each column we compute the greatest common divisor of the n numbers in that row/column, then we obtain $2n$ different outcomes.

(a) Prove that, in each Benelux n-square (with $n \geqslant 2$), there exists a cell containing a number which is at least $2n^2$.

(b) Call a Benelux n-square *minimal* if all n^2 numbers in the cells are at most $2n^2$. Determine all $n \geqslant 2$ for which there exists a minimal Benelux n-square.

Time allowed: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points

9th Benelux Mathematical Olympiad

5–7 May 2017 — Namur, Belgium

Problems

Language: ***French***

Les problèmes ***ne*** *sont* ***pas*** *ordonnés par difficulté estimée.*

Problème 1. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ telles que

$$f(xy) \cdot \operatorname{pgcd}\Big(f(x)f(y), f(\tfrac{1}{x})f(\tfrac{1}{y})\Big) = xyf(\tfrac{1}{x})f(\tfrac{1}{y})$$

pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, où $\operatorname{pgcd}(a, b)$ désigne le plus grand commun diviseur de a et b.

Problème 2. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. Alice et Bob jouent à un jeu concernant un pays constitué de n îles. Deux de ces n îles exactement possèdent une usine. Initialement il n'y a aucun pont dans le pays. Alice et Bob jouent chacun à leur tour de la manière suivante. À chaque tour, le joueur doit construire un pont entre deux îles différentes I_1 et I_2 telles que :

- I_1 et I_2 ne sont pas déjà reliées par un pont ;
- au moins une des deux îles I_1 et I_2 est reliée par une suite de ponts à une île avec une usine (ou possède elle-même une usine). (En effet, un accès à une usine est nécessaire pour la construction.)

Dès qu'un joueur construit un pont qui rend possible le passage d'une usine à l'autre, ce joueur perd le jeu. (Cela déclenche en effet une guerre industrielle entre les deux usines.) Si Alice entame le jeu, alors déterminer (pour chaque $n \geqslant 2$) qui a une stratégie gagnante.

(*Note* : Il est autorisé de construire un pont passant au-dessus d'un autre pont.)

Problème 3. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$, on a $\angle B = \angle C$ et $\angle D = 90°$. Supposons que $|AB| = 2|CD|$. Prouver que la bissectrice de $\angle ACB$ est perpendiculaire à CD.

Problème 4. Un *n-carré Benelux* (avec $n \geqslant 2$) est une grille $n \times n$ composée de n^2 cases, chacune d'elles contenant un entier strictement positif, satisfaisant les conditions suivantes :

- les n^2 entiers strictement positifs sont deux à deux distincts ;
- si pour chaque ligne et chaque colonne on calcule le plus grand commun diviseur des n nombres dans cette ligne/colonne, alors on obtient $2n$ résultats différents.

(a) Prouver que, dans chaque n-carré Benelux (avec $n \geqslant 2$), il existe une case contenant un nombre supérieur ou égal à $2n^2$.

(b) Un n-carré Benelux est dit *minimal* si les n^2 nombres dans les cases sont inférieurs ou égaux à $2n^2$. Déterminer tous les $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe un n-carré Benelux minimal.

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

9th Benelux Mathematical Olympiad

5–7 May 2017 — Namur, Belgium

Problems

Language: ***Dutch***

De opgaven staan ***niet*** *op volgorde van ingeschatte moeilijkheidsgraad.*

Opgave 1. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ waarvoor geldt dat

$$f(xy) \cdot \operatorname{ggd}\Big(f(x)f(y), f(\tfrac{1}{x})f(\tfrac{1}{y})\Big) = xyf(\tfrac{1}{x})f(\tfrac{1}{y})$$

voor alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, waarbij $\operatorname{ggd}(a, b)$ staat voor de grootste gemene deler van a en b.

Opgave 2. Zij $n \geqslant 2$ een geheel getal. Alice en Bob spelen een spel dat gaat over een land bestaande uit n eilanden. Precies twee van deze n eilanden hebben een fabriek. In het begin is er nog geen enkele brug in het land. Alice en Bob moeten om beurten een brug bouwen tussen twee verschillende eilanden, en wel zodanig dat als de speler een brug bouwt tussen de eilanden I_1 en I_2, er geldt dat:

- I_1 en I_2 nog niet zijn verbonden door middel van een brug;
- minstens één van de twee eilanden I_1 en I_2 middels een aantal bruggen verbonden is met een eiland met een fabriek (of zelf een fabriek heeft). (Immers, je moet een fabriek kunnen bereiken om een brug te kunnen bouwen.)

Zodra een speler een brug bouwt die het mogelijk maakt om van de ene naar de andere fabriek te gaan, verliest deze speler het spel. (Dat leidt namelijk tot een industrieel gevecht tussen beide fabrieken.) Als Alice begint, bepaal dan (voor elke $n \geqslant 2$) wie een winnnende strategie heeft.

(*Opmerking*: Het is toegestaan om een brug te bouwen die over een andere brug heen gaat.)

Opgave 3. Zij gegeven een convexe vierhoek $ABCD$ met $\angle B = \angle C$ en $\angle D = 90^\circ$. Veronderstel dat $|AB| = 2|CD|$. Bewijs dat de bissectrice van $\angle ACB$ loodrecht op CD staat.

Opgave 4. Een n-*Beneluxvierkant* (met $n \geqslant 2$) is een $n \times n$-rooster bestaande uit n^2 hokjes die elk een (strikt) positief geheel getal bevatten, zodanig dat aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

- de n^2 (strikt) positieve gehele getallen zijn allemaal verschillend;
- als we voor elke rij en elke kolom de grootste gemene deler berekenen van de n getallen in die rij/kolom, dan krijgen we $2n$ verschillende uitkomsten.

(a) Bewijs dat er in elk n-Beneluxvierkant (met $n \geqslant 2$) een hokje bestaat met een getal dat minstens $2n^2$ is.

(b) Noem een n-Beneluxvierkant *minimaal* als alle n^2 getallen in de hokjes hoogstens $2n^2$ zijn. Bepaal alle $n \geqslant 2$ waarvoor er een minimaal n-Beneluxvierkant bestaat.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard