Questions de la finale MINI 2007

1. Dans ma classe, toutes les interrogations de mathématique sont notées sur 20. Ma moyenne jusqu'à présent était 12, mais avec le 17 que je viens d'obtenir, elle est passée à 13.
   (a) Quelle doit être ma note à la prochaine interrogation pour que ma nouvelle moyenne soit 14 ?
   (b) Cette moyenne de 14 peut-elle passer à 17 si j'obtiens 20 à toutes les interrogations suivantes ? Si oui, combien d'interrogations parfaites dois-je faire ?

   Solution de Mélanie Sedda

   (a) Soit x le nombre d'interrogations faites lorsque la moyenne était de 12/20. Il a donc obtenu $12x$ points sur un total de $20x$.

$$\begin{aligned} \frac{12x+17}{20x+20} &= \frac{13}{20} \\ 12x+17 &= 13(x+1) \\ 12x+17 &= 13x+13 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

   Il avait donc réalisé 4 interrogations lorsque sa moyenne était de 12/20. Après sa cinquième interrogation, sa moyenne passe à 13/20. Pour qu'elle passe à 14/20, il doit obtenir 19/20 au prochain contrôle. En effet, soit y les points qu'il doit obtenir à ce 6^{e} contrôle.

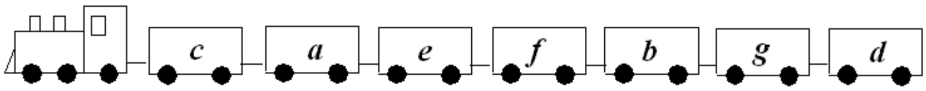
$$\begin{aligned} \frac{13\times 5+y}{20\times 5+20} &= \frac{14}{20} \\ 65+y &= 14\times 6 \\ y &= 19 \end{aligned}$$

   (b) Soit z le nombre d'interrogations parfaites à réaliser pour que la moyenne soit de 17/20.

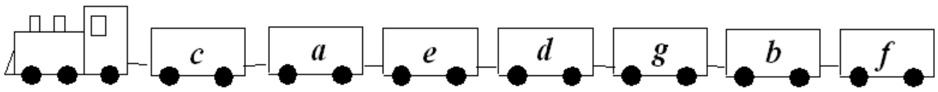
$$\begin{aligned} \frac{14\times 6+20z}{20\times 6+20z} &= \frac{17}{20} \\ 84+20z &= 102+17z \\ z &= 6 \end{aligned}$$

   Il doit donc réaliser 6 contrôles parfaits.

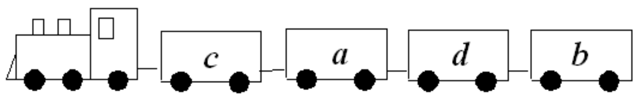
2. Dans un centre ferroviaire, les installations permettent de détacher deux ou plusieurs des derniers wagons du train puis de les rattacher aux premiers wagons (ou à la locomotive, si aucun wagon n'a été laissé) après avoir inversé l'ordre des wagons détachés. Par exemple, le train représenté ci-dessous où on détache les quatre derniers wagons



devient après une telle manœuvre



(a) Trier les wagons d'un train consiste à replacer ces wagons dans un ordre bien déterminé après un certain nombre de manœuvres. Est-il possible de trier les wagons du train figuré ci-dessous pour obtenir l'ordre "a-b-c-d" ?



Si oui, quel est le nombre minimum de manœuvres nécessaires ?

(b) Est-il toujours possible de trier tous les wagons d'un train ? Expliquer votre réponse.

(c) Est-il toujours possible de trier un train de trois wagons en au plus une manœuvre ? en au plus deux manœuvres ? en au plus trois manœuvres ?

Solution de Hugo Templier

(a) Oui en quatre manœuvres :

1	:	c	b	d	a
2	:	a	d	b	c
3	:	a	d	c	b
4	:	a	b	c	d

(b) Oui car on peut toujours déplacer un wagon au bout du train pour ensuite le placer à n'importe quelle position. En appliquant cette méthode et en commençant par placer le 1^{er} wagon de l'ordre, puis le 2^{e} et ainsi de suite, on peut trier n'importe quel train.

(c) Avec 1 manœuvre : non car si le 1^{er} wagon de l'ordre est au milieu, il faudrait 2 manœuvres pour le placer à l'avant.

Exemple	:	c	a	b
1re manœuvre	:	c	b	a
2e manœuvre	:	a	b	c

Avec 2 manœuvres : non car si le 1er wagon de l'ordre est au milieu et le 2e wagon de l'ordre en 1er lieu, il faudrait 3 manœuvres pour le placer.

Exemple	:	b	a	c	ou	Exemple	:	b	a	c
1re manœuvre	:	b	c	a		1re manœuvre	:	c	a	b
2e manœuvre	:	a	c	b		2e manœuvre	:	c	b	a
3e manœuvre	:	a	b	c		3e manœuvre	:	a	b	c

Avec 3 manœuvres : oui car quel que soit l'ordre des wagons, avec 3 manœuvres et 3 wagons, il y a toujours moyen d'appliquer la méthode décrite en (b).

3. On désigne par $\overline{ab}$ un nombre où a est le chiffre des dizaines et b celui des unités. Il existe des nombres naturels $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ tels que a, b, c, d sont non nuls, tous différents et $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$, par exemple $21 \times 36 = 12 \times 63$.
   (a) Trouver au moins deux autres exemples.
   (b) Déterminer une relation générale qui lie a, b, c et d lorsque $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$ et montrer qu'elle fournit toutes les solutions (a, b, c, d).
   (c) Combien y a-t-il de solutions ?

Solution de Alexandre Sanchez-Falcon

(a) $42 \times 21 = 84 \times 12 (= 1\,008)$ et $46 \times 32 = 64 \times 23 (= 1\,472)$.

(b) On peut le faire sous forme d'équation ; mais il faut multiplier le chiffre des dizaines par 10.

$$\begin{aligned} (10a+b)(10c+d) &= (10b+a)(10d+c) \\ 100ac + 10ad + 10bc + bd &= 100bd + 10bc + 10ad + ac \\ 100ac + bd &= 100bd + ac \\ 99ac &= 99bd \\ ac &= bd \end{aligned}$$

$ac = bd$ est donc la relation générale. On sait maintenant que les chiffres des dizaines multipliés entre eux sont égaux aux chiffres des unités multipliés entre eux. On peut donc déterminer les solutions.

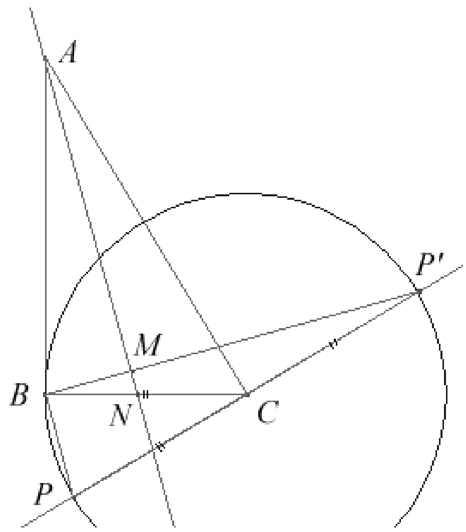
(c) Couples de nombre $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$.

Produit $ac = bd$	Couples de nombres
6	$12 \times 63 = 21 \times 36, 13 \times 62 = 31 \times 26$
8	$12 \times 84 = 21 \times 48, 14 \times 82 = 41 \times 28$
12	$24 \times 63 = 42 \times 36, 23 \times 46 = 32 \times 64$
18	$23 \times 96 = 32 \times 69, 26 \times 93 = 62 \times 39$
24	$34 \times 86 = 43 \times 68, 36 \times 84 = 63 \times 48$

4. Le triangle ABC est rectangle avec $\widehat{ABC}$ mesurant 90°. Le segment $[CP]$ est perpendiculaire à la droite AC et tel que $|CP| = |CB|$.
   (a) Si l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$ vaut 26°, est-il vrai que la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est soit parallèle, soit perpendiculaire à la droite BP ?
   (b) Cette propriété reste-t-elle vraie si l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$ ne vaut pas 26° ?
   (c) La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est-elle toujours parallèle à BP ? est-elle toujours perpendiculaire à BP ?

Solutions de Mélanie Sedda (a) et François Staelens (b) et (c)

(a) Il existe 2 points P et P'. La bissectrice de A coupe BP' en M.
- Dans le triangle ABC :
$\widehat{ACB} = 180° - 26° - 90° = 64°$.
- Dans le triangle BCP' isocèle de sommet principal C : $\widehat{C} = 90° + 64° = 154°$ donc
$\widehat{BP'C} = \widehat{CBP'} = \frac{1}{2}(180° - 154°) = 13°$.
- D'où $\widehat{ABP'} = 90° - 13° = 77°$, puis $\widehat{AMB} = 180° - 77° - 13° = 90°$.
Le segment BP' est donc bien perpendiculaire à la bissectrice de l'angle BAC.
- Le milieu de $[PP']$ est équidistant des 3 sommets du triangle BPP', d'où le triangle BPP' est rectangle en B. les droites AM et BP sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.



(b) et (c) Supposons $\widehat{BAC} = a$ alors $\widehat{BCA} = 90° - a$ et $\widehat{PCB} = 90° - (90° - a) = a$.
Le triangle CBP est isocèle de sommet C puisque $|CP| = |BC|$, donc $\widehat{PBC} = \frac{1}{2}(180° - a) = 90° - \frac{a}{2}$.
La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe BC en N donc $\widehat{BAN} = \frac{a}{2}$ et $\widehat{BNA} = 90° - \frac{a}{2}$.
Les angles $\widehat{PBC}$ et $\widehat{BNA}$ sont des angles alternes-internes de même amplitude déterminés par les droites AN et PB et la sécante BN, donc $AN//PB$.
On a aussi $\widehat{BCP'} = \widehat{BCA} + 90° = (90° - a) + 90° = 180° - a$.
Le triangle BCP' est isocèle puisque $|CP'| = |CB|$, donc $\widehat{CBP'} = \frac{1}{2}(180° - (180° - a)) = \frac{a}{2}$. D'où $\widehat{P'BA} = 90° - \frac{a}{2}$.
Dans le triangle BMA, les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{P'BA}$ sont complémentaires donc BM est perpendiculaire à AM.

Questions de la finale Midi 2007

1. Le chiffre des unités du nombre naturel N est x. On effectue successivement les opérations suivantes :
   - supprimer le chiffre des unités x du nombre N ;
   - retrancher $2x$ du nombre obtenu.

   Par exemple, le nombre 203 devient 20, puis 14.
   Est-il toujours vrai que le nombre final est un multiple de 7 si et seulement si le nombre initial N est un multiple de 7 ?

   Solution de Raphaël Egan

   Notons tout d'abord que tout nombre naturel peut s'écrire sous la forme $10d+x$ avec d comme nombre de dizaines et x comme chiffres des unités. Donc ici $N = 10d + x$. Notons également $7\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de 7. On doit donc prouver que

   $$10d + x \in 7\mathbb{N} \Rightarrow d - 2x \in 7\mathbb{N} \tag{1}$$

   et

   $$d - 2x \in 7\mathbb{N} \Rightarrow 10d + x \in 7\mathbb{N} \tag{2}$$

   (a) Preuve de (1)
   Hypothèse : $N = 10d + x \in 7\mathbb{N}$.
   Thèse : $d - 2x \in 7\mathbb{N}$.
   Preuve : Puisque $10d + x \in 7\mathbb{N}$, alors $20d + 2x \in 7\mathbb{N}$. De plus, $21d \in 7\mathbb{N}$ puisque $21d = 7\times 3\times d$. En soustrayant membre à membre, on obtient $d-2x \in 7\mathbb{N}$ car la somme ou la différence de deux multiples d'un même naturel est multiple de ce naturel.

   (b) Preuve de (2)
   Hypothèse : $d - 2x \in 7\mathbb{N}$.
   Thèse : $N = 10d + x \in 7\mathbb{N}$.
   Preuve : $21d \in 7\mathbb{N}$ et $d - 2x \in 7\mathbb{N}$ par hypothèse. En soustrayant membre à membre, on obtient $20d + 2x \in 7\mathbb{N}$ car la somme ou la différence de deux multiples d'un même naturel est multiple de ce naturel. Or, $20d+2x = 2(10d+x)$. Pour que ce nombre soit un mutliple de 7, il faut que $10d + x \in 7$.

2. (a) Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs dont la somme est égale au produit. Prouver qu'il n'en existe pas d'autres.
   (b) Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs formant une suite arithmétique dont la somme est égale au produit. Prouver qu'il n'en existe pas d'autres.
   (La suite (a, b, c) est appelée suite arithmétique lorsqu'il existe un entier r tel que $(a, b, c) = (a, a + r, a + 2r)$.)
   (c) Que devient la réponse au point (b) si la suite arithmétique est formée d'entiers quelconques (positifs, négatifs ou nuls) ?

Solution de Pierre Haas

(a) Notons a et b ces deux nombres qui doivent satisfaire à l'égalité

$$a + b = ab \iff b = ab - a \iff b = a(b - 1) \iff a = \frac{b}{b - 1}$$

Or, b et $b - 1$ sont deux nombres entiers consécutifs, ils sont donc premiers entre eux. Dès lors, si $b - 1$ divise b, il faut soit $b = 0$, ce qui est exclu par hypothèse, soit $b = 1 + 1 \iff b = 2$. Pour ce dernier cas, nous trouvons alors l'unique solution $(a, b) = (2, 2)$.

(b) En notant a, b et c les trois nombres et r la raison de la suite arithmétique, la condition de l'énoncé devient

$$\begin{aligned} a + b + c = abc &\iff a + (a + r) + (a + 2r) = a(a + r)(a + 2r) \\ &\iff 3(a + r) = a(a + r)(a + 2r) \\ &\iff 3 = a(a + 2r) \end{aligned}$$

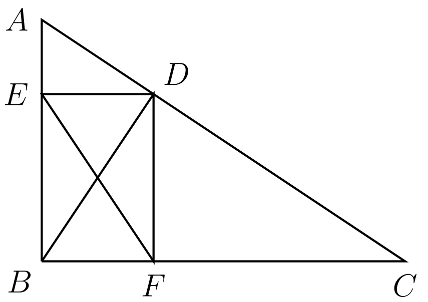
Comme a et $a + 2r$ sont des nombres entiers, il suffit de considérer la factorisation première du nombre premier 3. Deux cas sont dès lors possibles :
– soit on a $a = 1$ et donc $1 + 2r = 3$ ou $r = 1$, d'où découle le triplet solution $(a, b, c) = (1, 2, 3)$;
– soit on a $a = 3$ et donc $3 + 2r = 1$ ou $r = -1$, d'où découle le triplet solution $(a, b, c) = (3, 2, 1)$.

En simplifiant plus haut par $a + r$, nous avons supposé que $a + r \neq 0$ ou encore $r \neq -a$. Si maintenant, $r = -a$, la condition de l'énoncé devient $a + 0 + (-a) = a \times 0 \times (-a)$ ce qui est vérifié pour toute valeur de a. Cependant, la solution $(a, 0, -a)$ est à rejeter ici car on a certainement a ou $-a$ qui appartient à $\mathbb{Z}^-$. De plus, ici, les trois nombres sont supposés être non nuls.

(c) La solution $(a, 0, -a)$ devient possible. Par ailleurs, dans le cas $a + r \neq 0$, il faut encore considérer les possibilités $a = -1$, d'où $r = -1$ avec la soltuion $(a, b, c) = (-1, -2, -3)$, et $a = -3$, d'où $r = 1$ avec la solution $(a, b, c) = (-3, -2, -1)$.

3. Le triangle ABC est rectangle avec $\widehat{ABC}$ mesurant 90°. Le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse est D et les pieds des perpendiculaires abaissées de D respectivement sur $[BA]$ et $[BC]$ sont E et F. Soient r_1, r_2 et r_3 les rayons des cercles inscrits aux triangles AED, EDF et FDC respectivement. La formule $r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}$ est-elle toujours correcte ?

Solution de Jingran Lin

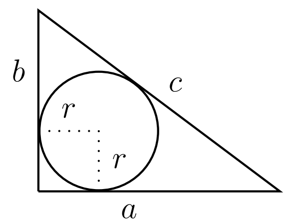


$ED//BF$
$\widehat{BAD} = \widehat{DBC} = \alpha$
Les triangles rectangles ABD et BCD sont semblables,
donc $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$
ou encore $AD \cdot DC = BD^2 = EF^2$.

Dans un triangle rectangle, le rayon du cercle inscrit vaut

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

(Voir le dessin)



Donc
$r_1 = \frac{AE+ED-AD}{2} = \frac{AD\cos\alpha + AD\sin\alpha - AD}{2} = \frac{AD}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$.
$r_2 = \frac{ED+DF-EF}{2} = \frac{EF\cos\alpha + EF\sin\alpha - EF}{2} = \frac{EF}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$.
$r_3 = \frac{DF+FC-DC}{2} = \frac{DC\cos\alpha + DC\sin\alpha - DC}{2} = \frac{DC}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$.
$r_1 \times r_3 = \frac{AD}{2}\frac{DC}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)^2 = \frac{EF^2}{4}(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)^2 = r_2^2$.

4. Déterminer tous les nombres entiers a, b tels que

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$

(a) pour $n = 2$;
(b) pour $n = 3$;
(c) pour $n > 3$.

Solution de Nicolas Radu

(a) On a successivement
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.
Donc $(a, b) = (0, m)$ ou $(m, 0)$ avec m un entier quelconque.

(b) On a successivement $(a+b)^3 = a^3 + b^3 \Rightarrow a^3 + 3a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 \Rightarrow 3ab(a+b) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ou $a = -b$.
Donc $(a, b) = (0, m)$ ou $(m, 0)$ ou $(m, -m)$ avec m un entier quelconque.

(c) – Si n est pair.

$$\begin{aligned} & (a+b)^n = a^n + b^n \\ \Rightarrow \quad & a^n + x_1 a^{n-1} b + x_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + x_2 a^2 b^{n-2} + x_1 a b^{n-1} + b^n = a^n + b^n \end{aligned}$$

– Soit $a = 0$, d'où $(a, b) = (0, m)$.
– Soit $b = 0$, d'où $(a, b) = (m, 0)$.
– Soit $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Tous les x_i étant positifs :
  – si a et b sont positifs, tous les $a^{n-i}b^i$ sont strictement positifs,
  – si a et b sont négatifs, tous les $a^{n-i}b^i$ sont strictement positifs, car n étant pair, i et $n-i$ sont de même parité,
  – si l'un des nombres est négatif, par exemple b, alors on note $c = -b$ alors on devrait avoir $(a-c)^n = a^n + c^n$.
  - Si $a > c$, alors $a < a - c$ d'où $a^n > (a-c)^n$,
  - Si $a < c$, alors $c > |a - c|$ d'où $c^n > (a-c)^n$.
  Cela conduit à $a^n + c^n > (a-c)^n$, ce qui n'est pas correct.

– Si n est impair.
  – Si a et b sont positifs, tous les $a^{n-i}b^i$ sont strictement positifs.
  – Si a et b sont négatifs, on pose $a = -c$ et $b = -d$, d'où

$$\begin{aligned} (-c-d)^n &= -c^n - d^n \\ (-(c+d)^n) &= -(c^n + d^n) \\ (c+d)^n &= c^n + d^n \end{aligned}$$

et on revient au cas où les deux nombres sont positifs.

- Si a ou b est nul, alors $a^n = a^n$ et $b^n = b^n$, d'où $(a, b) = (m, 0)$ ou $(0, m)$.
- Si l'un des nombres est négatif (par exemple b), on pose $c = -b$ d'où $(a - c)^n = a^n - c^n$.

  Cependant, on sait que

  $$a^n - c^n = (a - c)(a^{n-1} + a^{n-1}c + \cdots + ac^{n-2} + c^{n-1})$$

  et donc

  $$(a - c)^n = (a - c)(a^{n-1} + a^{n-1}c + \cdots + ac^{n-2} + c^{n-1}).$$

  - Si $a = c$, alors $a = c$ d'où $a = -b$ et donc $(a, b) = (m, -m)$.
  - Si $a \neq c$, alors

    $$(a - c)^{n-1} = a^{n-1} + a^{n-1}c + \cdots + ac^{n-2} + c^{n-1}$$

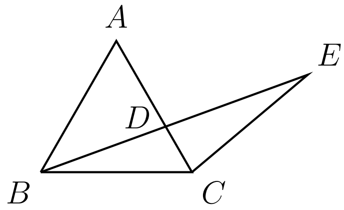
    - si $a > c$ alors $a > a - c$ d'où $a^{n-1} > (a - c)^{n-1}$,
    - si $c > a$, alors $c > |a - c|$ d'où $c^{n-1} < (a - c)^{n-1}$ (car $n - 1$ est pair).

    D'où

    $$(a - c)^{n-1} < a^{n-1} + a^{n-2}c + \cdots + ac^{n-2} + c^{n-1}$$

    ce qui est impossible.

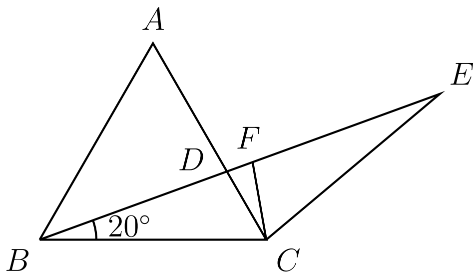
Questions de la finale Maxi 2007



1. Le triangle ABC est équilatéral. La demi-droite $[BE$ coupe le segment $[AC]$ en D et est telle que $\widehat{CBE}$ mesure $20°$ et $|DE| = |AB|$. Que vaut l'amplitude de l'angle $\widehat{BEC}$?

   Solution de Amandine Mousset

   On montre que l'angle $\widehat{BEC}$ a une amplitude de $20°$.
   Puisque le triangle ABC est équilatéral, on a $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$ et $|AB| = |BC| = |AC|$. De plus, $|AB| = |DE|$.
   Puisque $\widehat{CBE} = 20°$, on en déduit que $\widehat{BDC} = 100°$ et $\widehat{CDE} = 80°$.

   Posons F, le point de la droite BE tel que $\widehat{DCF} = 20°$.
   $\widehat{BCF}$ a une amplitude de $80°$ car $\widehat{C} = 60°$ et $\widehat{DCF} = 20°$.
   Le triangle CDF est isocèle car $\widehat{CDE} = \widehat{CDF} = 80°$ et $\widehat{DCF} = 20°$, donc $\widehat{DFC} = \widehat{CFB} = 80°$. On a donc $|DC| = |FC|$.
   Le triangle BFC est isocèle car $\widehat{CFB} = \widehat{BCF} = 80°$, d'où $|BF| = |BC|$.
   Les triangles BFC et EDC sont isométriques car $|FC| = |DC|$; $|BF| = |ED|$ et $\widehat{CFB} = \widehat{CDE} = 80°$.
   Dès lors $\widehat{CBF} = \widehat{CED} = \widehat{BEC} = 20°$.

2. Autour d'un cercle, on dispose successivement n chiffres a_1, a_2, ..., a_n (chacun valant de 0 à 9). Partant de a_1 et tournant autour du cercle, on forme le nombre $A_1 = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$ (dont les chiffres successifs sont $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$) ; partant de a_2 et tournant dans le même sens, on forme le nombre $A_2 = \overline{a_2 a_3 a_4 \ldots a_n a_1}$ et ainsi de suite. La proposition

   « si d est un diviseur de A_1, alors d est aussi un diviseur de chacun des A_i pour $i \in \{2, 3, 4, \ldots, n\}$ »

   est-elle vraie

   (a) pour $d = 9$?

   (b) pour $d = 27$ et $n = 2\,007$?

   (c) pour $d = 27$ et pour tout n ?

Solution de Giancarlo Kerg (a) et (b)

(a) Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

9 divise A_1 donc 9 divise $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Or $\sum_{i=1}^{n} a_i$ est la somme des chiffres de tous les A_i d'où 9 divise A_i avec $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(b) $10^k \equiv 10 (\text{mod } 27)$ si $k \equiv 1 (\text{mod } 3)$;
$10^k \equiv 19 (\text{mod } 27)$ si $k \equiv 2 (\text{mod } 3)$;
$10^k \equiv 1 (\text{mod } 27)$ si $k \equiv 0 (\text{mod } 3)$.
Soit S_1 la somme de tous les a_i où $i \equiv 1 (\text{mod } 3)$;
S_2 la somme de tous les a_i où $i \equiv 2 (\text{mod } 3)$;
S_3 la somme de tous les a_i où $i \equiv 0 (\text{mod } 3)$.
On a :

$$\begin{aligned} 27 \text{ divise } A_1 &\Leftrightarrow A_1 \equiv 0 (\text{mod } 27) \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot S_3 + 10 \cdot S_2 + 19 \cdot S_1 \equiv 0 (\text{mod } 27) \end{aligned}$$

De même, 27 divise A_2

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow A_2 \equiv 0 (\text{mod } 27) \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot S_1 + 19 \cdot S_2 + 10 \cdot S_3 \equiv 0 (\text{mod } 27) \\ &\Leftrightarrow (1 \cdot S_1 + 19 \cdot S_2 + 10 \cdot S_3) - (1 \cdot S_3 + 10 \cdot S_2 + 19 \cdot S_1) \equiv 0 (\text{mod } 27) \\ &\Leftrightarrow 9 \cdot S_3 + 9 \cdot S_2 - 18 \cdot S_1 \equiv 0 (\text{mod } 27) \\ &\Leftrightarrow 9(S_1 + S_2 + S_3) \equiv 0 (\text{mod } 27) \\ &\Leftrightarrow 3 \text{ divise } S_1 + S_2 + S_3 \end{aligned}$$

De même aussi, 27 divise A_3

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad A_3 \equiv 0 (\text{mod } 27) \\
&\Leftrightarrow \quad 10 \cdot S_1 + 1 \cdot S_2 + 19 \cdot S_3 \equiv 0 (\text{mod } 27) \\
&\Leftrightarrow \quad (10 \cdot S_1 + 1 \cdot S_2 + 19 \cdot S_3) - (1 \cdot S_3 + 10 \cdot S_2 + 19 \cdot S_1) \equiv 0 (\text{mod } 27) \\
&\Leftrightarrow \quad 18 \cdot S_1 - 9 \cdot S_2 - 9 \cdot S_3 \equiv 0 (\text{mod } 27) \\
&\Leftrightarrow \quad 18(S_1 + S_2 + S_3) \equiv 0 (\text{mod } 27) \\
&\Leftrightarrow \quad 3 \text{ divise } S_1 + S_2 + S_3
\end{aligned}$$

Or 3 divise A_1 donc 3 divise $S_1 + S_2 + S_3$ donc 3 divise A_3.

On permute les S_k uniquement lorsque n est multiple de 3, or $2007 = 3 \times 669$.

(c) Non : en voici un contre-exemple. Si $n = 2$, 27 divise 27 mais 27 ne divise pas 72.

3. Considérons les ensembles de n points dont trois quelconques ne sont pas alignés. Pour un tel ensemble, formons tous les triangles dont les sommets sont dans cet ensemble.
   (a) Si les n points sont toujours pris dans le plan et si $n = 7$, quel est le nombre maximal de triangles qu'une droite de ce plan ne comprenant aucun des 7 points peut couper ?
   (b) Si les n points sont toujours pris dans l'espace et si $n = 7$, quel est le nombre maximal de triangles qu'un plan ne comprenant aucun des 7 points peut couper ?
   (c) Généralisez au cas où n est quelconque.

Solution de Pierre-Alain Jacqmin

(a) La droite divise le plan en deux parties. Elle coupe un triangle si et seulement si ses 3 sommets ne sont pas dans la même partie du plan.
Il y a $C_7^3 = 35$ triangles. Comptons combien de triangles ne sont pas coupés par la droite.
– Si la répartition des points de chaque côté de la droite est 3-4, la droite n'en coupe pas C_3^3 dans la première partie et C_4^3 dans la deuxième, donc 5 en tout.
– Si la répartition est 2-5 ou 1-6 ou 0-7, il n'y en a aucun qu'elle ne coupe pas dans la première partie et elle n'en coupe pas C_5^3 ou C_6^3 ou C_7^3 dans la deuxième partie, ce qui est dans tout les cas plus que 5.
Elle en coupe donc au maximum $35 - 5 = 30$.

(b) Le cas est similaire au (a) car le plan coupe l'espace en deux parties. Il coupe donc au maximum 30 triangles.

(c) Comme les cas sont similaires, je vais traiter le cas où c'est un plan qui coupe l'espace en deux parties. Il y a x points dans une partie et $n - x$ dans l'autre. Pour qu'un plan coupe un triangle, il faut au moins un sommet dans chaque partie. Il y a deux cas séparés.
– Deux sommets sont dans la région des x points : le plan en coupe $C_x^2 \cdot (n-x)$
– Dans l'autre cas, il coupe $C_{n-x}^2 \cdot x$.
Il en coupe donc

$$\begin{aligned}
C_x^2 \cdot (n-x) + C_{n-x}^2 \cdot x &= \frac{x(x-1)(n-x)}{2} + \frac{(n-x)(n-x-1)x}{2} \\
&= \frac{x(n-x)(x-1+n-x-1)}{2} \\
&= \frac{x(n-x)(n-2)}{2}
\end{aligned}$$

Comme n est fixé, maximisons $(n-x)x = -x^2+nx$. Le maximum est en $x = \frac{n}{2}$.

Si n est pair, le plan coupe

$$\frac{\frac{n}{2}\frac{n}{2}(n-2)}{2} = \frac{n^2(n-2)}{8} \text{ triangles.}$$

Si n est impair, le maximum est en $x = \frac{n-1}{2}$. Le plan coupe

$$\frac{\frac{n+1}{2}\frac{n-1}{2}(n-2)}{2} = \frac{(n+1)(n-1)(n-2)}{8} \text{ triangles.}$$

4. Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$f(n+1) > f(n) \quad \text{et} \quad f(f(n)) = 3n.$$

Que vaut $f(2\,007)$?

Solution de Antoine Ledent

On a $f(0) \geqslant 0$; $f(1) > f(0)$ et donc $f(1) \geqslant 1$, $f(2) > 7$, $f(2) \geqslant 2 \ldots f(n) \geqslant n$.
D'où $f(f(n)) \geqslant f(n)$ et $3n \geqslant f(n)$.
Si $f(n) = n$, $3n = f(f(n)) = f(n) = n$, ce qui est impossible (sauf si $n = 0$).
Si $f(n) = 3n$, $3n = f(f(n)) = f(n)$, ce qui est impossible.
On a donc $3n > f(n) > n$. Pour $n = 0$, on a $f(0) \geqslant 0$ et $f(0) \leqslant 3.0$, d'où $f(0) = 0$.
On a $1 < f(1) < 3$, d'où $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 6$, $f(6) = 9$, $f(9) = 18$, ... et de manière générale $f(3^n) = 2 \times 3^n$ et $f(2 \times 3^n) = 3^{n+1}$.

Puisque $f(3) < f(4) < f(5) < f(6)$, on a $6 < f(4) < f(5) < 9$, d'où $f(4) = 7$, $f(5) = 8$, $f(7) = 12$ et $f(8) = 15$.

Puisque $18 = f(9) < f(10) < f(11) < \ldots < f(18) = 27$, on a $f(10) = 19$, $f(11) = 20$, $f(12) = 21$, ..., $f(17) = 26$. De manière générale,

$$3^{n+1} < f(2 \times 3^n) < f(2 \times 3^n + 1) < \cdots < f(3^{n+1}) = 2 \times 3^{n+1}$$

$$2 \times 3^n = f(3^n) < f(3^n + 1) < f(3^n + 2) < \cdots < f(2 \times 3^n) < 3^{n+1}$$

D'où $f(3^n + 1) = 2 \times 3^n + 1$, ..., $f(3^n + k) = 2 \times 3^n + k$ (avec $0 \leqslant k < 3^n$) et $f(2 \times 3^n + k) = f(f(3^n + k)) = 3^{n+1} + 3k$.

Or, $2\,007 = 2 \times 3^6 + 549$, d'où $f(2\,007) = f(2 \times 3^6 + 549) = 3^7 + 3 \times 549 = 3\,834$.