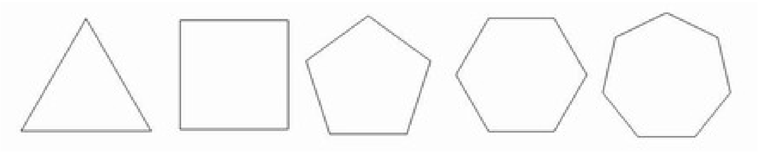
Les multiples facettes des polyèdres

Pascal Lambrechts (pascal.lambrechts@uclouvain.be)

Proclamation des lauréats aux olympiades de mathématiques
Mai 2012

Les polygones

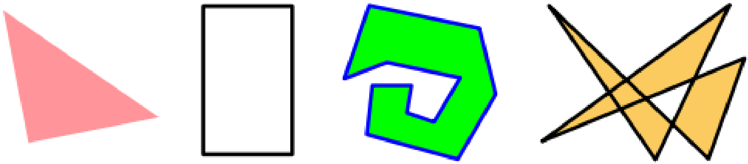
Les premiers polygones réguliers :



etc...

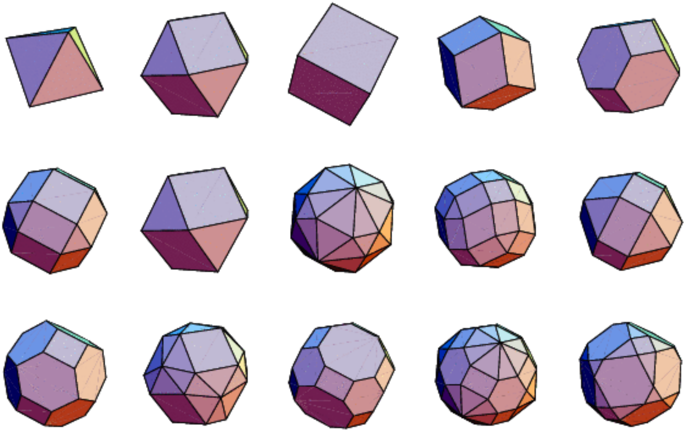
Pour chaque entier $n \geq 3$ il y a exactement un n-gone régulier convexe.

Il y a plein d'autres polygones, non réguliers :

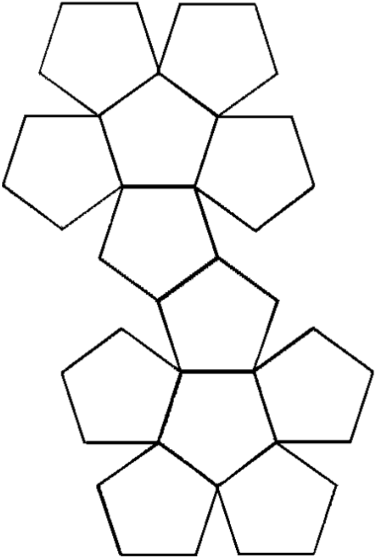


Polyèdres abstraits

Un polyèdre est un solide bordé par des faces polygonales.



Patron et diagramme de Schlegel d'un polyèdre



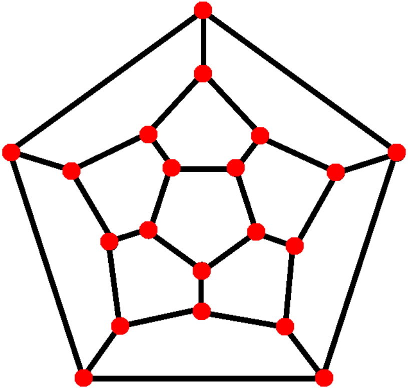


Diagramme de Schlegel du dodécaèdre.

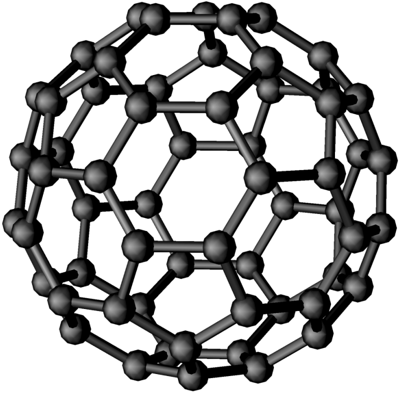
Les polyèdres en architecture

Les pyramides de Giza
(2500 Av JC)

La biosphère de R. Fuller (1967)

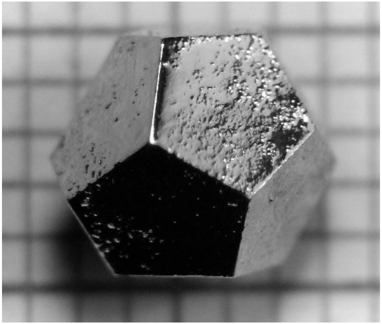
Les polyèdres en chimie

Cristaux de sel

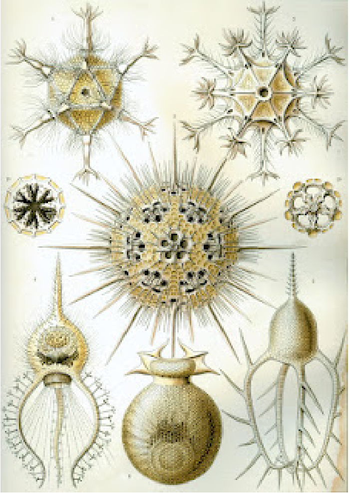


Molécule de fullerene C_{60}
(prix Nobel chimie 1996)

Les polyèdres en chimie et biologie

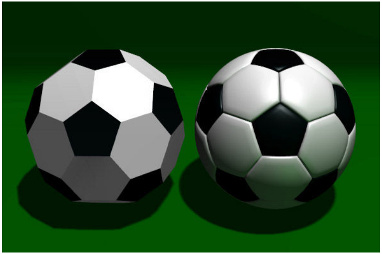


Quasi-cristal Ho-Mg-Zn
(prix Nobel de chimie 2011)



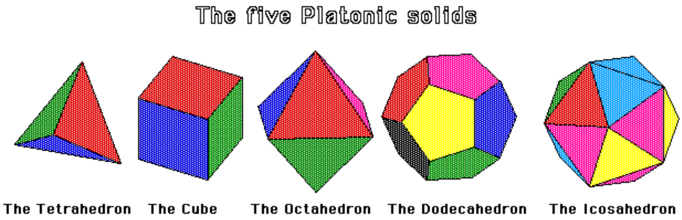
Quelques virus
(la grippe est un icosaèdre...)

Les polyèdres en sport et en haute couture



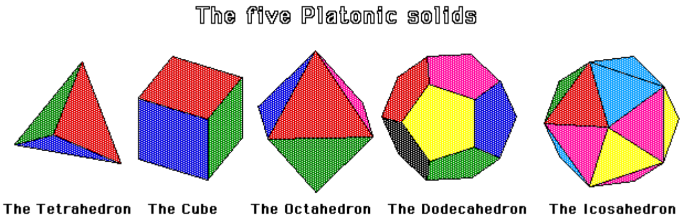
Cube et dodécadre de chez Dior...

Les polyèdres réguliers (solides de Platon)



Polyèdre	$p = \#$arêtes/faces	$q = \#$arêtes/sommets
tétradre	3	3
cube	4	3
octaèdre	3	4
dodécaèdre	5	3
icosaèdre	3	5

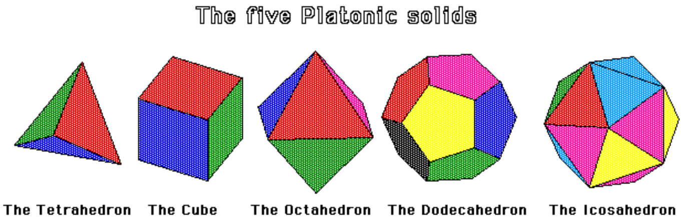
Les polyèdres réguliers (solides de Platon)



Polyèdre	$p = \#$arêtes/faces	$q = \#$arêtes/sommets
tétraèdre	3	3
cube	4	3
octaèdre	3	4
dodécaèdre	5	3
icosaèdre	3	5

Pourquoi n'y a-t-il que CINQ polyèdres réguliers (convexes) ?

Les polyèdres réguliers (solides de Platon)

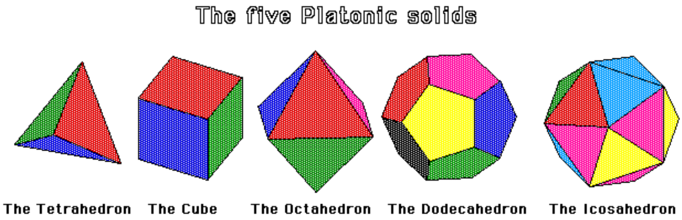


Polyèdre	$p = \#$arêtes/faces	$q = \#$arêtes/sommets
tétràdre	3	3
cube	4	3
octaèdre	3	4
dodécaèdre	5	3
icosaèdre	3	5

Pourquoi n'y a-t-il que CINQ polyèdres réguliers (convexes) ?

En chaque sommet se rencontrent q faces à p côtés : forte contrainte !

Les polyèdres réguliers (solides de Platon)



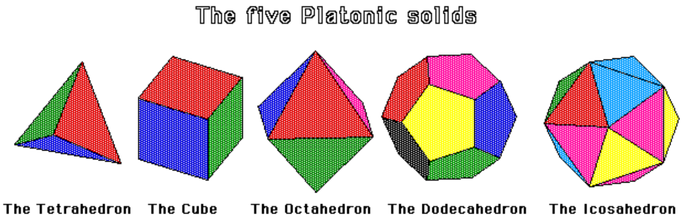
Polyèdre	$p = \#$arêtes/faces	$q = \#$arêtes/sommets
tétràdre	3	3
cube	4	3
octaèdre	3	4
dodécaèdre	5	3
icosaèdre	3	5

Pourquoi n'y a-t-il que CINQ polyèdres réguliers (convexes) ?

En chaque sommet se rencontrent q faces à p côtés : forte contrainte !

Pourquoi y en a-t-il quand même CINQ ?

Les polyèdres réguliers (solides de Platon)



Polyèdre	$p = \#$arêtes/faces	$q = \#$arêtes/sommets
tétradre	3	3
cube	4	3
octaèdre	3	4
dodécaèdre	5	3
icosaèdre	3	5

Pourquoi n'y a-t-il que CINQ polyèdres réguliers (convexes) ?

En chaque sommet se rencontrent q faces à p côtés : forte contrainte !

Pourquoi y en a-t-il quand même CINQ ?

Un miracle de la nature (ou des mathématiques) !

La physique de Platon (350 Av. JC)

Quatre éléments fondamentaux constituent toute chose :

la TERRE $\leftrightarrow$ l'AIR   le FEU $\leftrightarrow$ l'EAU.

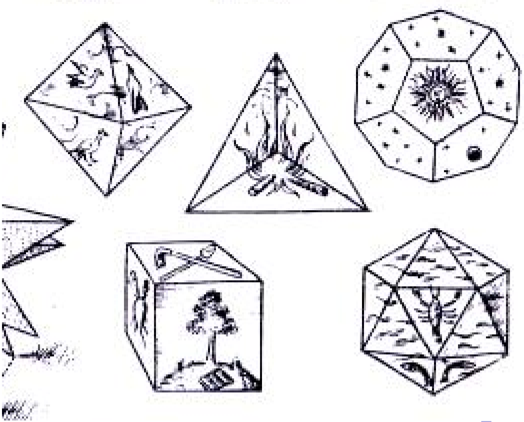
Ces 4 éléments correspondent au cube, octaèdre, tétraèdre et icosaèdre.

La physique de Platon (350 Av. JC)

Quatre éléments fondamentaux constituent toute chose :

la TERRE $\leftrightarrow$ l'AIR le FEU $\leftrightarrow$ l'EAU.

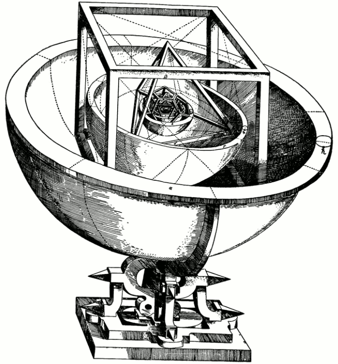
Ces 4 éléments correspondent au cube, octaèdre, tétraèdre et icosaèdre.
L'UNIVERS correspond au dodécaèdre (12 faces = 12 signes du Zodiaque)

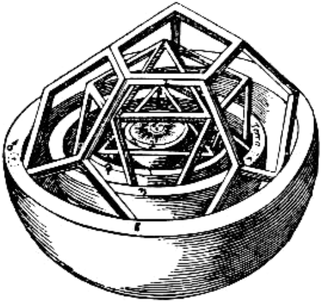


La cosmologie de Kepler (1571-1630)

Johannes Kepler a découvert que les planètes gravitent autour du soleil le long d'ellipses en suivant des lois précises.

Avant cela il formule une autre hypothèse dans *Mysterium Cosmographicum :*
les six planètes se déplacent sur des sphères inscrites dans les cinq polyèdres de Platon emboîtés :





La formule d'Euler : $S - A + F = 2$

Notons : $S :=$ nbr de sommets, $A :=$ nbr d'arêtes, $F :=$ nbr de faces.

Polyèdre	F	A	S	
tétraèdre	4	6	4	
cube	6	12	8	
octaèdre	8	12	6	
dodécaèdre	12	30	20	
icosaèdre	20	30	12	
pyramide carrée	5	8	5	
icosaèdre tronqué	32	90	60	

La formule d'Euler : $S - A + F = 2$

Notons : $S :=$ nbr de sommets, $A :=$ nbr d'arêtes, $F :=$ nbr de faces.

Polyèdre	F	A	S	$\chi := F - A + S$
tétraèdre	4	6	4	2
cube	6	12	8	2
octaèdre	8	12	6	2
dodécaèdre	12	30	20	2
icosaèdre	20	30	12	2
pyramide carrée	5	8	5	2
icosaèdre tronqué	32	90	60	2

Formule d'Euler (env. 1750)

Pour tout polyèdre ayant la "forme" d'une sphère :

$$S - A + F = 2.$$

Quelques exercices pour nos champions des maths

Exercice

Démontrer la formule d'Euler $S - A + F = 2$.
Indication : que se passe-t-il si on ajoute/enlève un sommet (ou une arête) ?

Exercice

Utiliser la formule d'Euler pour montrer qu'il n'y a que 5 polyèdres réguliers.
Indication : Exprimer S et F à partir de p et q et de A. En déduire des contraintes sur p et q.

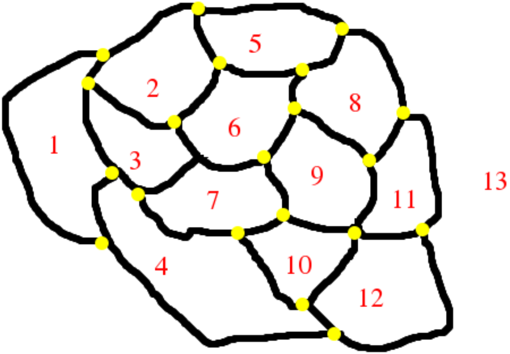
Exercice

Pour un polyèdre à faces pentagonales et hexagonales où trois faces se rencontrent en chaque sommet, déterminer le nombre de faces pentagonales et hexagonales.
Un exemple est l'icosaèdre tronqué (ballon de foot). Y en a-t-il d'autres ?

La formule d'Euler d'un graphe dans le plan

Dessinons dans le plan un graphe constitué de S sommets et de A arêtes. Le graphe découpe le plan en R région (y compris une grande région extérieure non bornée). Alors

$$S - A + R = 2.$$



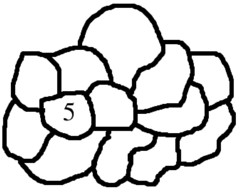
$R = 13$
$S = 19$
$A = 31$
$S - A + R = 2$

Conséquence de la formule d'Euler sur les cartes géographiques

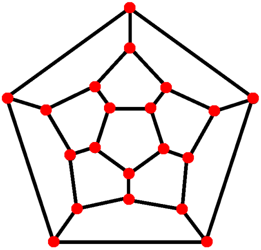
Dessinons une carte géographique.
Les points à l'intersection de ≥ 3 frontières sont des *sommets* d'un graphe et les morceaux de frontière entre deux sommets sont les *arêtes*. Les régions délimitées sont les pays.

Exercice

Montrer qu'il y exite toujours un pays ayant au plus 5 voisins.

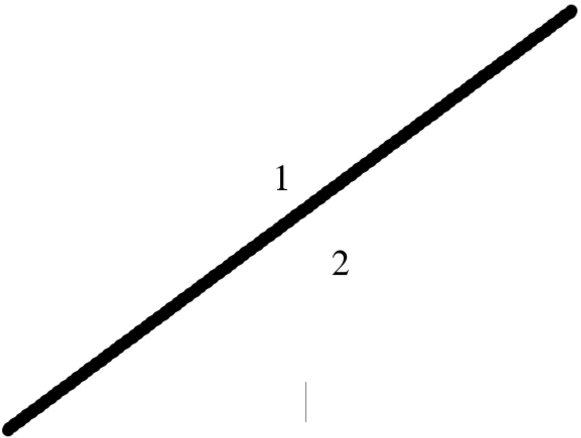


Choix d'un pays à ≤ 5 voisins



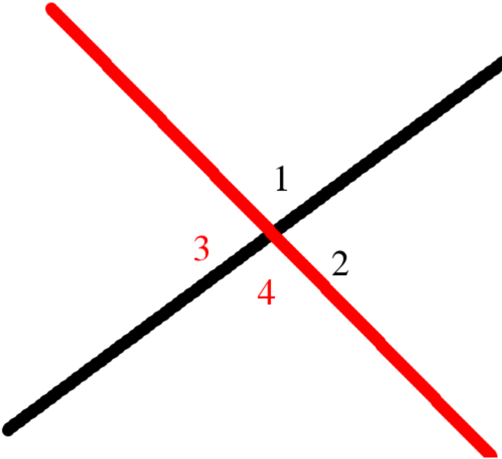
Dans la carte "dodécaédrique", tout pays a 5 voisins.

Découpage du plan par des droites



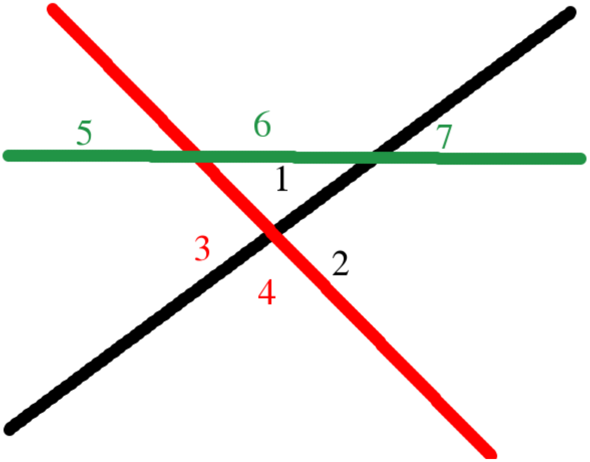
# droites	1	2	3	4	5,6,...
# régions	2				.

Découpage du plan par des droites



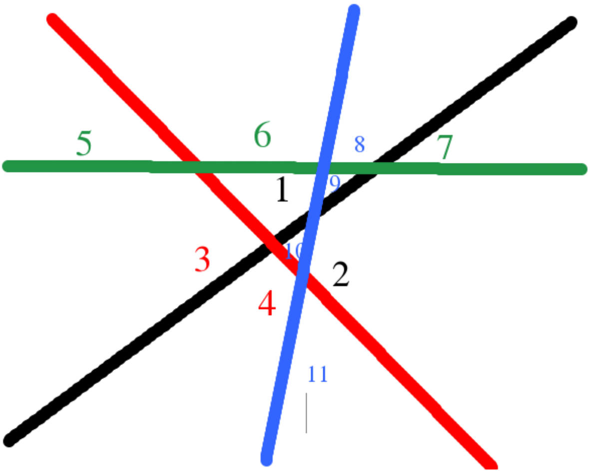
# droites	1	2	3	4	5,6,...
# régions	2	4			.

Découpage du plan par des droites



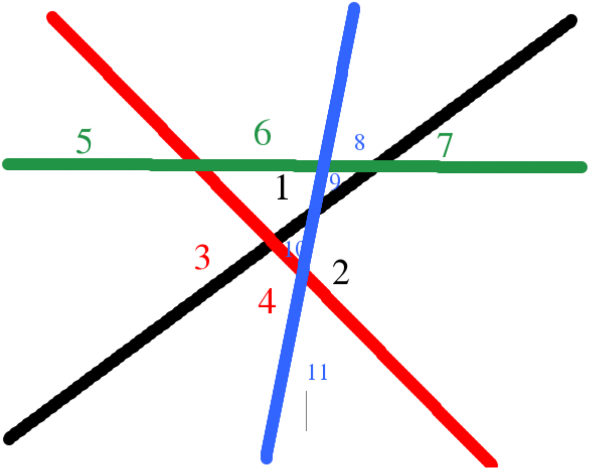
# droites	1	2	3	4	5,6,...
# régions	2	4	7		.

Découpage du plan par des droites



# droites	1	2	3	4	5,6,...
# régions	2	4	7	11	.

Découpage du plan par des droites



# droites	1	2	3	4	5,6,...
# régions	2	4	7	11	exercice !.

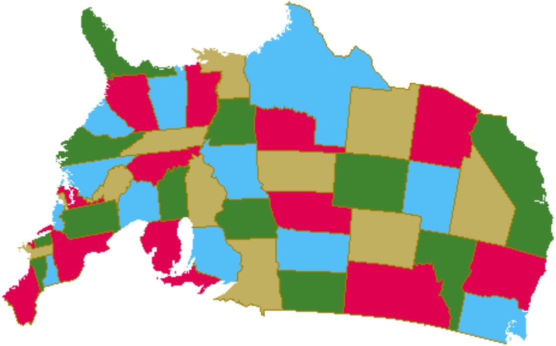
Indication : utiliser la formule d'Euler !

Hypothèse : pas trois droites concourantes ; pas deux droites parallèles.

Coloriage de cartes de géographie politique

Le théorème des 4 couleurs (prouvé en 1976.)

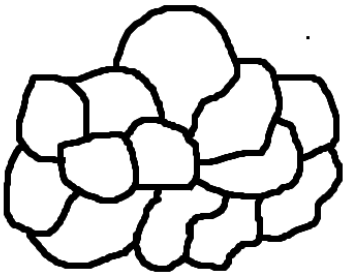
Toute carte géographique peut être coloriée avec au plus 4 couleurs de sorte que deux pays voisins soient toujours de couleurs distinctes.



La preuve est très longue et nécéssite une longue vérification par ordinateur.

Preuve du théorème des 6 couleurs

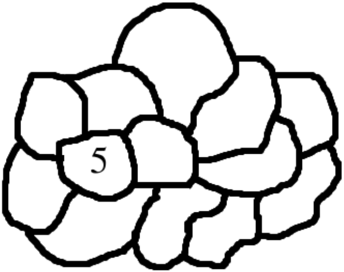
Il est facile de démontrer le théorème des 6 couleurs par récurrence sur le nombre n de pays.
C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons le pour $n + 1$ pays.



Une carte de 13 pays à colorier

Preuve du théorème des 6 couleurs

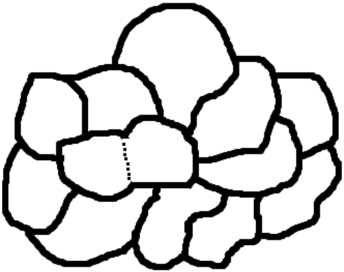
Il est facile de démontrer le théorème des 6 couleurs par récurrence sur le nombre n de pays.
C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons le pour $n + 1$ pays.



Choix d'un pays à ≤ 5 voisins

Preuve du théorème des 6 couleurs

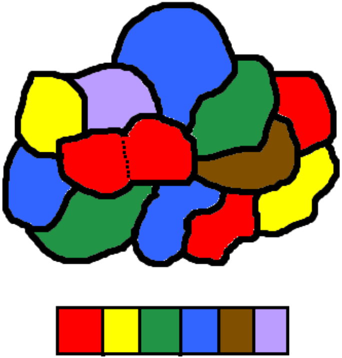
Il est facile de démontrer le théorème des 6 couleurs par récurrence sur le nombre n de pays.
C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons le pour $n + 1$ pays.



Annexion du pays par un voisin

Preuve du théorème des 6 couleurs

Il est facile de démontrer le théorème des 6 couleurs par récurrence sur le nombre n de pays.
C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons le pour $n + 1$ pays.

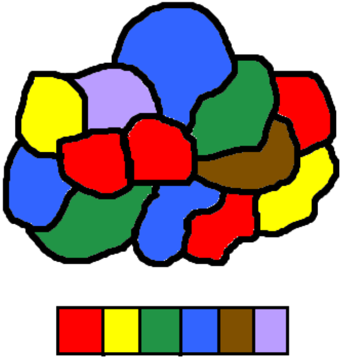


Coloriage de la carte après annexion

Preuve du théorème des 6 couleurs

Il est facile de démontrer le théorème des 6 couleurs par récurrence sur le nombre n de pays.

C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons le pour $n + 1$ pays.

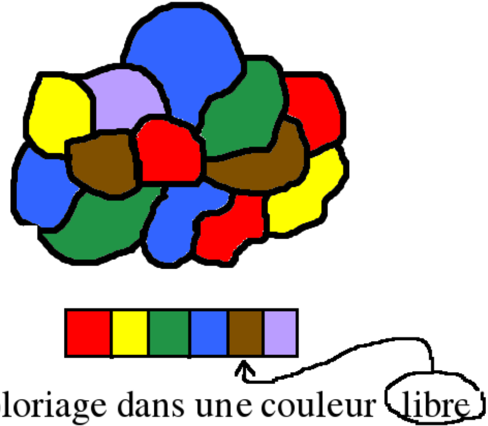


Reprise d'indépendance du pays

Preuve du théorème des 6 couleurs

Il est facile de démontrer le théorème des 6 couleurs par récurrence sur le nombre n de pays.

C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons le pour $n + 1$ pays.



Preuve du théorème des 6 couleurs

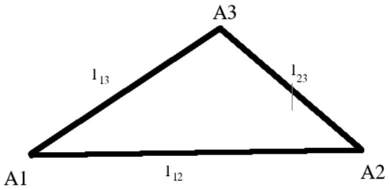
Il est facile de démontrer le théorème des 6 couleurs par récurrence sur le nombre n de pays.
C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons le pour $n + 1$ pays.

Exercice

Adapter l'argument pour démontrer le théorème des 5 couleurs.

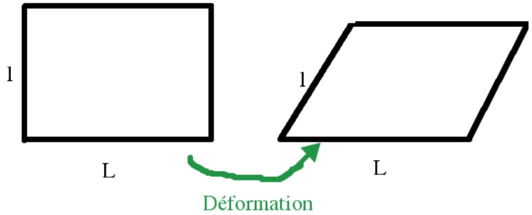
Les triangles sont rigides

Un triangle est rigide : si ses côtés sont des barres rigides de longueurs fixées, alors il est impossible de déformer le triangle.



En fait si on fixe les trois longueurs $l_{12} = \overline{A_1A_2}$, $l_{13} = \overline{A_1A_3}$ et $l_{23} = \overline{A_2A_3}$, il n'y a qu'un seul triangle possible.

Par contre un quadrilatère n'est pas rigide :



Les croisillons et la rigidité des triangles

Rigidifier une étagère ou un échafaudage

Les polyèdres sont-ils rigides ?

Euler :

> *Une figure solide fermée ne peut être déformée, à moins d'être déchirée.*

Les polyèdres sont-ils rigides ?

Euler :

> *Une figure solide fermée ne peut être déformée, à moins d'être déchirée.*

Théorème de rigidité de Cauchy (1813)

Les polyèdres convexes sont rigides si les faces sont rigides.

Corollaire

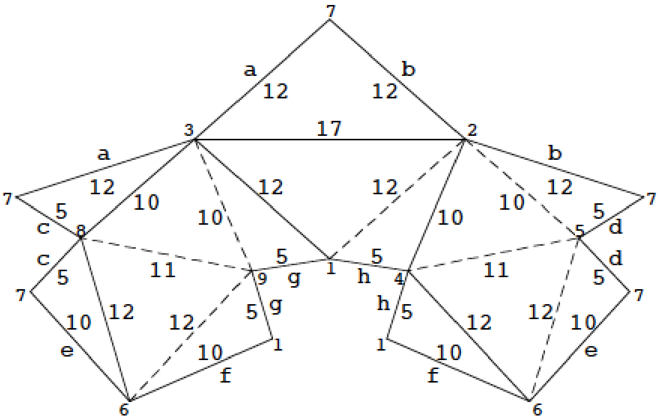
Les polyèdres convexes à faces triangulaires sont rigides.

R. Bricard (ingénieur belge, 1896) construit un exemple d'octaèdre déformable (mais non plongé)

Le flexoèdre de Connelly

Connelly, 1976

Il existe un polyèdre à faces triangulaires et non rigide.



Les longueurs des arêtes ne changent pas quand on déforme le flexoèdre !

La conjecture du soufflet

Question

Est-ce que le volume d'un flexoèdre peut changer pendant la déformation ?

Peut-on exprimer le volume intérieur du polyèdre comme une fonction des longueurs des arêtes ?

Formule de Heron pour l'aire d'un triangle

$$\mathrm{aire}(\Delta A_1 A_2 A_3) = \sqrt{S(S-l_{12})(S-l_{13})(S-l_{23})}$$

avec

$$S = \frac{l_{12}+l_{13}+l_{23}}{2}.$$

Par contre il ne peut pas y avoir de formule à la Héron pour un quadrilatère !

Formule de Pierro de la Francesca pour le volume d'un tétraèdre

Piero della Francesca (env. 1450)

Les six longueurs des arêtes d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ déterminent son volume par une formule explicite.

$$\text{volume}(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{12}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 \\ 1 & l_{21}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 \\ 1 & l_{31}^2 & l_{32}^2 & 0 & l_{34}^2 \\ 1 & l_{41}^2 & l_{42}^2 & l_{43}^2 & 0 \end{pmatrix}}$$

où $l_{ij} = \overline{A_iA_j}$.

Formule de Sabitov pour le volume d'un polyèdre

Théorème de Sabitov (1995)

Il existe un polynôme

$$f(x) = a_N \cdot x^N + a_{N-1} \cdot x^{N-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

tel que

- les coefficients $a_N, \ldots, a_1, a_0$ sont des fonctions des longueurs des arêtes l_{ij} du polyèdre
- le volume du polyèdre est une racine de ce polynôme :

$$f(\text{volume}) = 0.$$

Corollaire

Le volume d'un flexoèdre est inchangé pendant toute la déformation.

Le dodécaèdre et l'univers

Hypothèse dodécaédrique (Luminet, Weeks et al. ; Nature 2003)

L'univers a peut être la forme d'un espace obtenu à partir d'un dodécaèdre solide en identifiant ses faces opposées.
Cette hypothèse peut être vérifiée par des données expérimentales accessibles.

Le dodécaèdre et l'univers

Hypothèse dodécaédrique (Luminet, Weeks et al. ; Nature 2003)

L'univers a peut être la forme d'un espace obtenu à partir d'un dodécaèdre solide en identifiant ses faces opposées.
Cette hypothèse peut être vérifiée par des données expérimentales accessibles.

Malheureusement, il semble que récemment les données expérimentales ont contredit cette hypothèse. Platon ne tient pas encore sa revanche....

A quoi ressemblerait un univers dodécaédrique ?

that's all...

Merci de votre attention.
Félicitations à tous les lauréats ! ! !

Les transparents de cette conférence seront publiés sur :

`http://www.uclouvain.be/scienceinfuse`

`pascal.lambrechts@uclouvain.be`