Mathématique, discrète et appliquée

Des promenades et des arbres

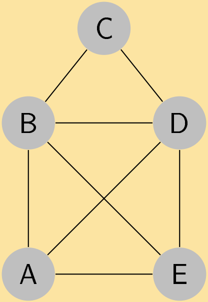
Marc Pirlot et Philippe Fortemps

Mathématique et Aide à la Décision
Faculté polytechnique de Mons

Proclamation des Olympiades Mathématiques 2008
24 mai 2008

Des points et des flèches : les graphes

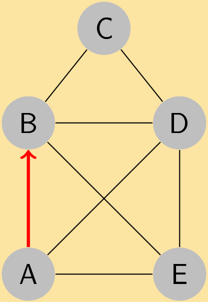
Nous y avons tous joué



enveloppe à dessiner sans lever le crayon . . .

Des points et des flèches : les graphes

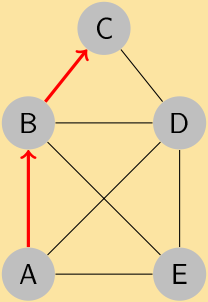
Nous y avons tous joué



enveloppe à dessiner sans lever le crayon . . .

Des points et des flèches : les graphes

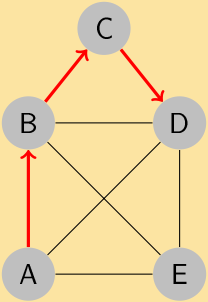
Nous y avons tous joué



enveloppe à dessiner sans lever le crayon ...

Des points et des flèches : les graphes

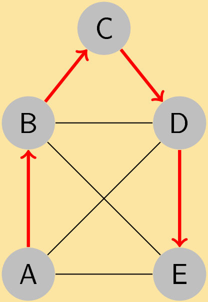
Nous y avons tous joué



enveloppe à dessiner sans lever le crayon ...

Des points et des flèches : les graphes

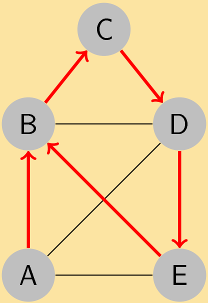
Nous y avons tous joué



enveloppe à dessiner sans lever le crayon ...

Des points et des flèches : les graphes

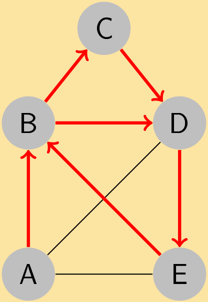
Nous y avons tous joué



enveloppe à dessiner sans lever le crayon ...

Des points et des flèches : les graphes

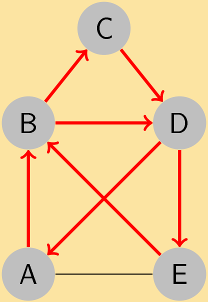
Nous y avons tous joué



enveloppe à dessiner sans lever le crayon ...

Des points et des flèches : les graphes

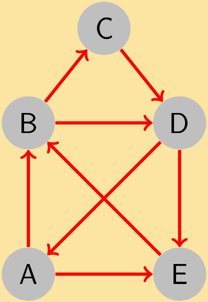
Nous y avons tous joué



enveloppe à dessiner sans lever le crayon ...

Des points et des flèches : les graphes

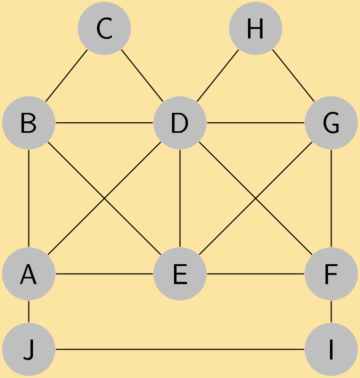
Nous y avons tous joué



enveloppe à dessiner sans lever le crayon ...

Des points et des flèches : les graphes

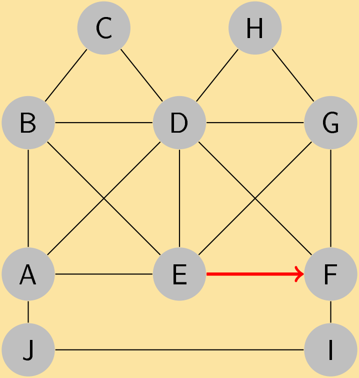
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

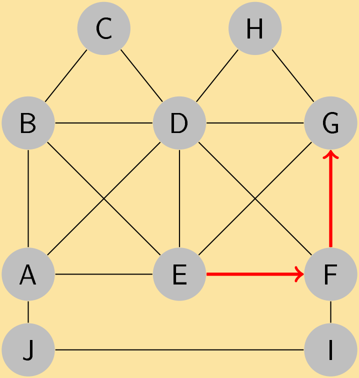
… en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

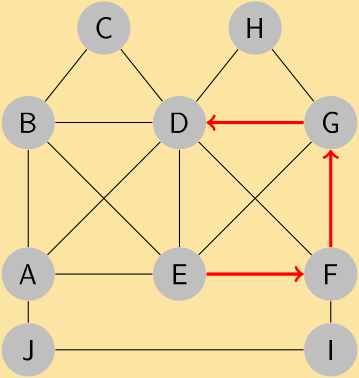
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

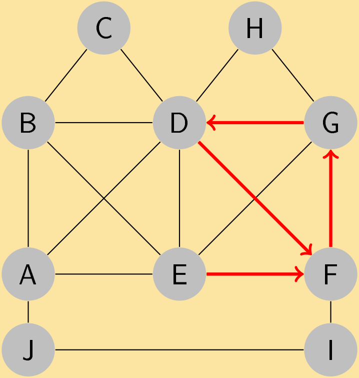
… en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

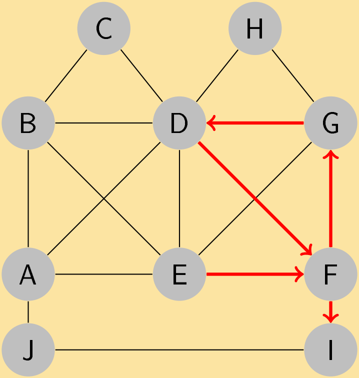
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

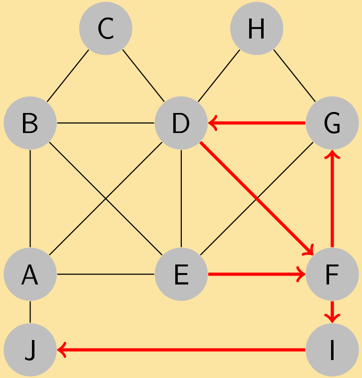
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

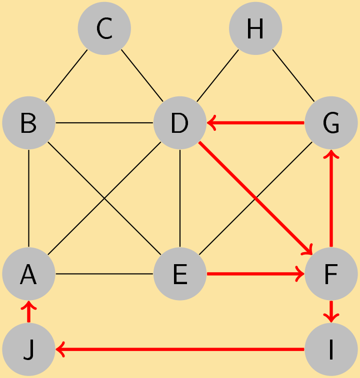
… en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

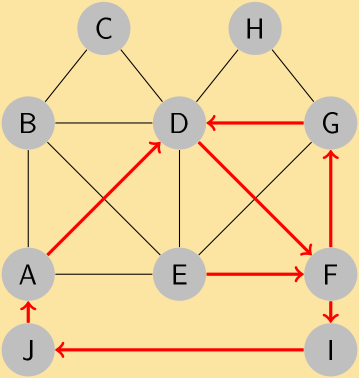
… en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

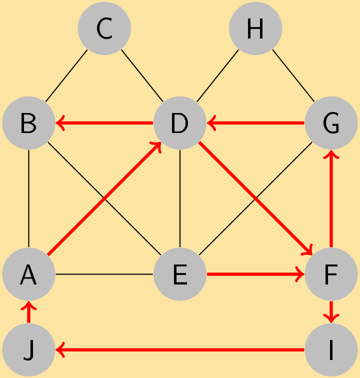
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

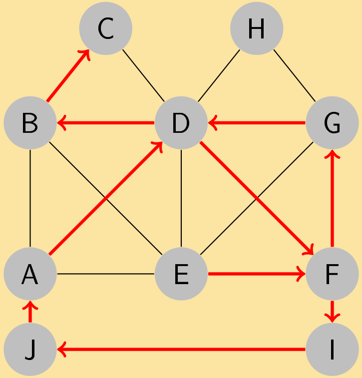
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

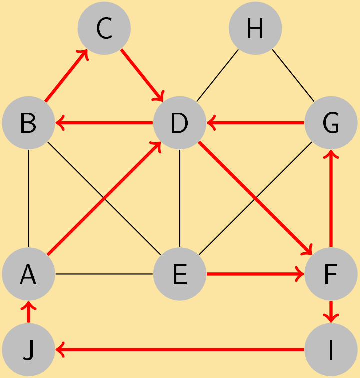
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

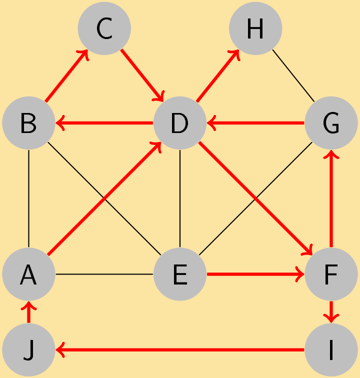
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

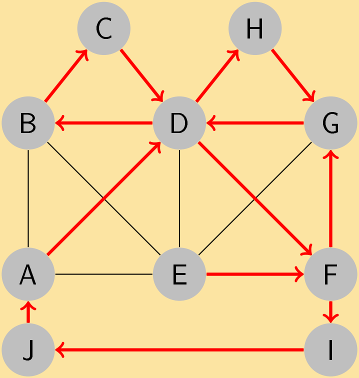
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

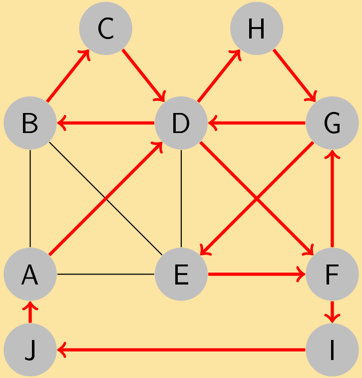
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

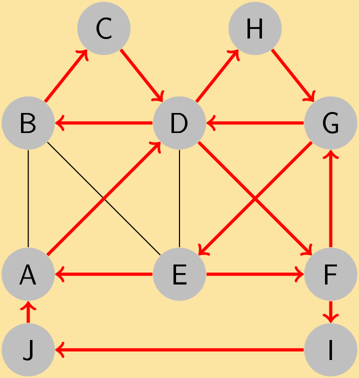
... en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

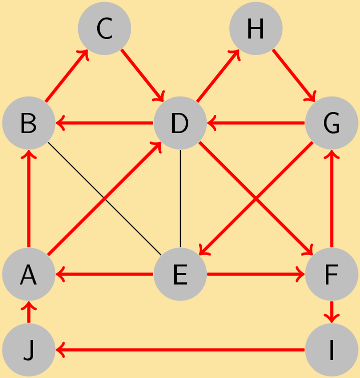
… en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

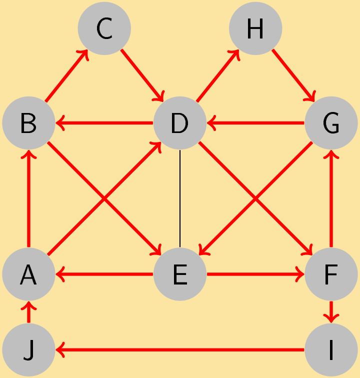
… en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

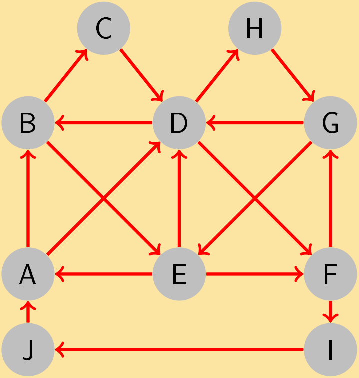
… en plus compliqué



double maison avec terrasse

Des points et des flèches : les graphes

... en plus compliqué



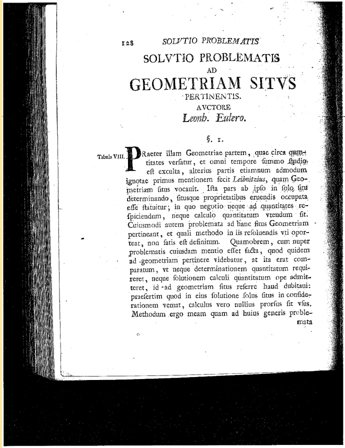
double maison avec terrasse

Euler est un bon prof de dessin

Y a-t-il un truc pour dessiner sans lever son crayon? Oui!

Euler est un bon prof de dessin

Y a-t-il un truc pour dessiner sans lever son crayon? Oui!
Leonhard EULER (Bâle 1707 - St Petersbourg 1783)
écrit un mémoire en 1759 sur le sujet (en latin).

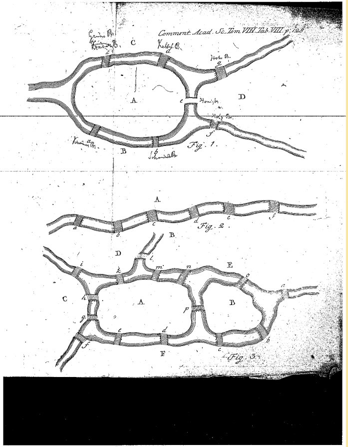


128 *SOLVTIO PROBLEMATIS*

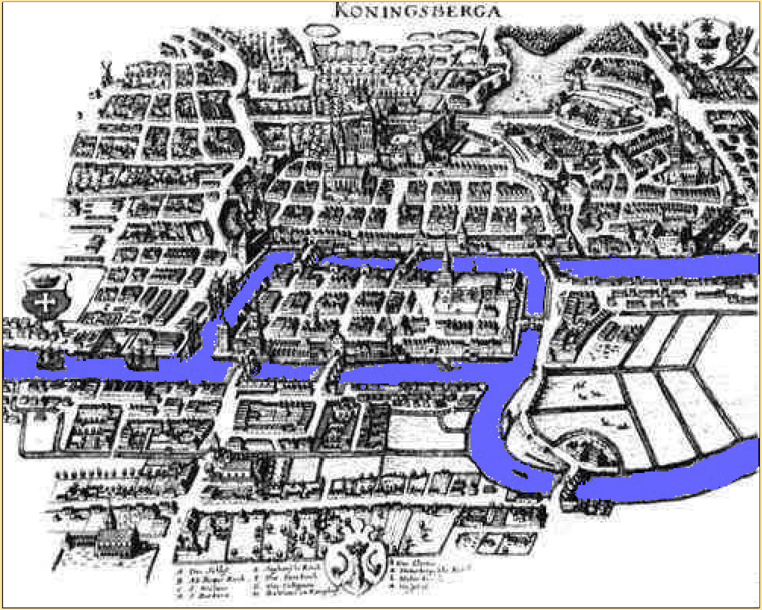
SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

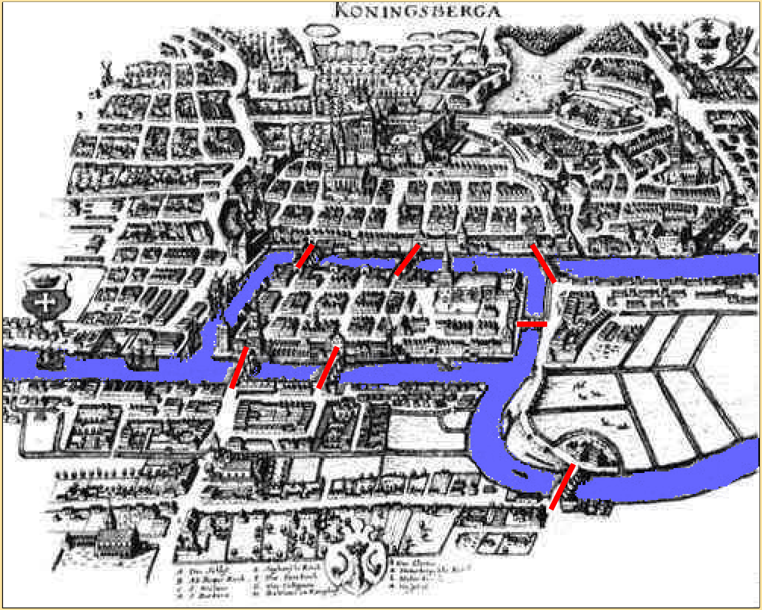
Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata



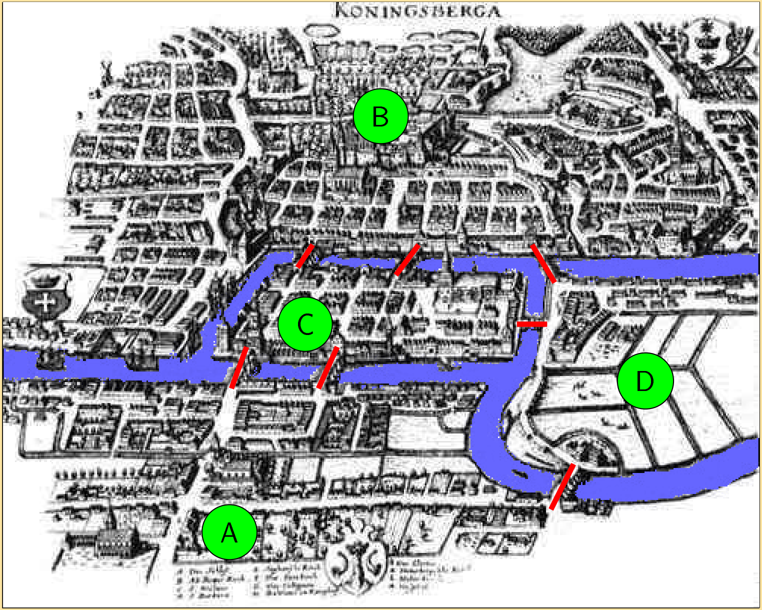
Il schématise la situation par un graphe, sur le plan de Königsberg:



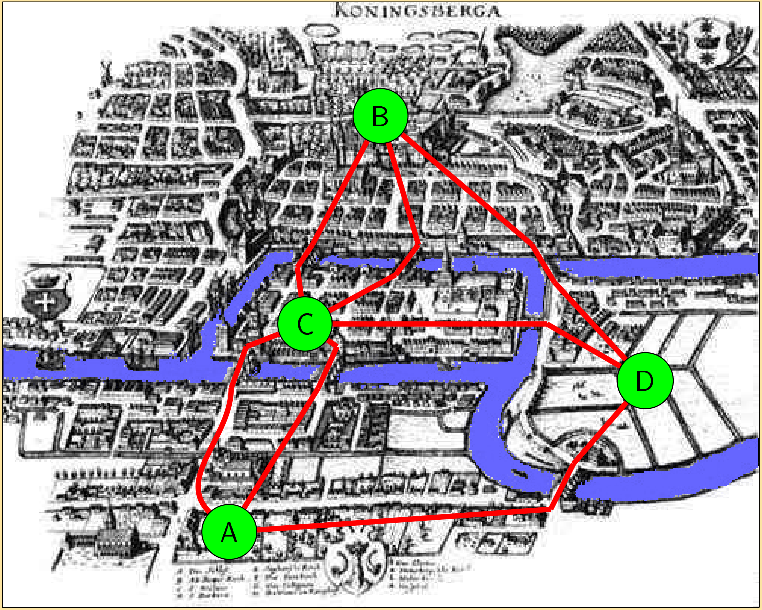
Il schématise la situation par un graphe, sur le plan de Königsberg:



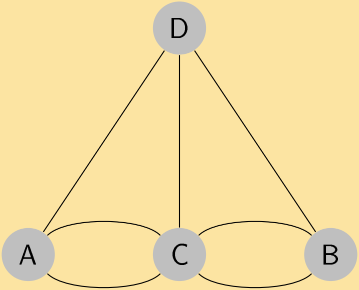
Il schématise la situation par un graphe, sur le plan de Königsberg:



Il schématise la situation par un graphe, sur le plan de Königsberg:



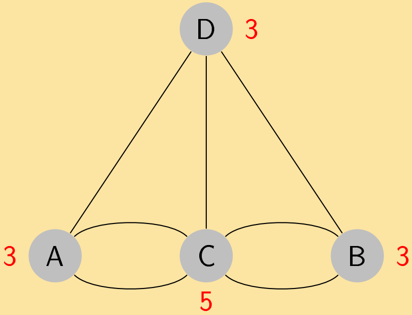
Euler montre que ce n'est pas possible. Voici le graphe:



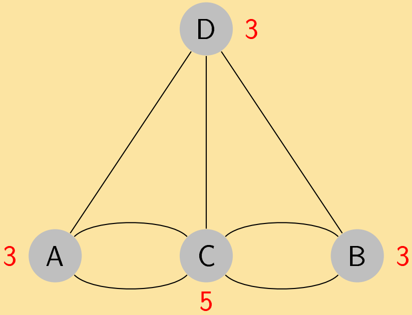
Pour une promenade en circuit, il faut sortir de chaque zone autant de fois qu'on y entre: tous les sommets doivent avoir un degré pair

degré d'un sommet: nombre d'arêtes incidentes au sommet

Tous les sommets sont de degré impair:

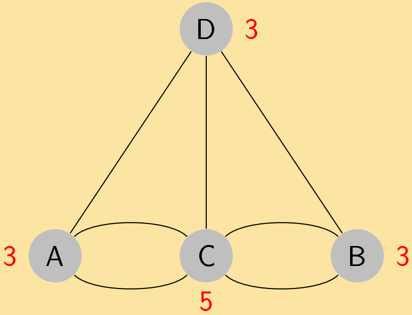


Tous les sommets sont de degré impair:



Si on accepte qu'une promenade se termine ailleurs qu'elle a commencé, on peut admettre 2 sommets de degré impair: le point de départ et le point d'arrivée

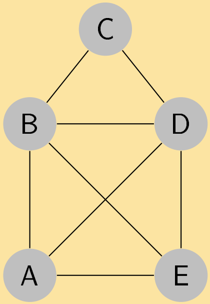
Tous les sommets sont de degré impair:



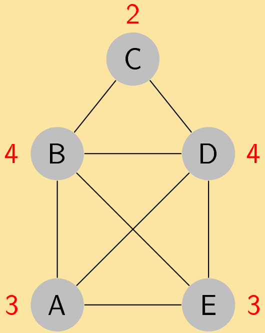
Si on accepte qu'une promenade se termine ailleurs qu'elle a commencé, on peut admettre 2 sommets de degré impair: le point de départ et le point d'arrivée

$\Rightarrow$ pas possible non plus pour Königsberg!

Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

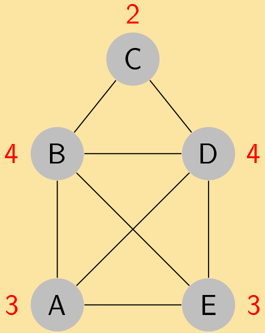


Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!



Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

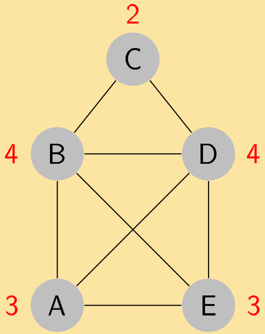
Il faut partir de A et finir en E (ou l'inverse)



Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

Il faut partir de A et finir en E (ou l'inverse)

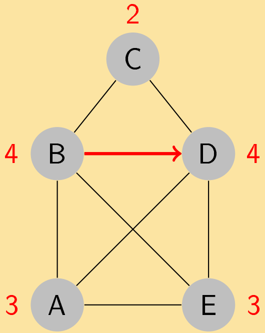
Essayons en partant de B, pour voir ...



Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

Il faut partir de A et finir en E (ou l'inverse)

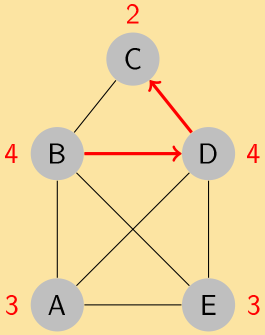
Essayons en partant de B, pour voir ...



Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

Il faut partir de A et finir en E (ou l'inverse)

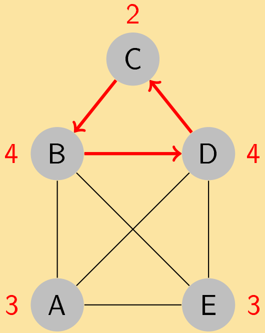
Essayons en partant de B, pour voir ...



Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

Il faut partir de A et finir en E (ou l'inverse)

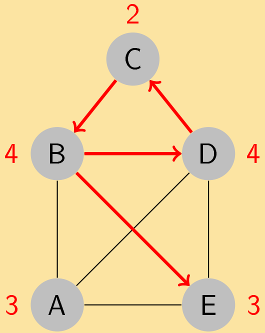
Essayons en partant de B, pour voir ...



Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

Il faut partir de A et finir en E (ou l'inverse)

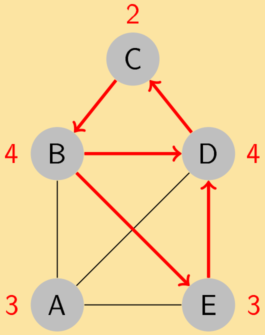
Essayons en partant de B, pour voir ...



Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

Il faut partir de A et finir en E (ou l'inverse)

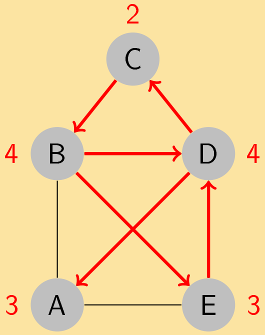
Essayons en partant de B, pour voir ...



Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

Il faut partir de A et finir en E (ou l'inverse)

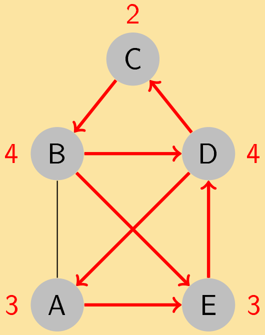
Essayons en partant de B, pour voir ...



Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

Il faut partir de A et finir en E (ou l'inverse)

Essayons en partant de B, pour voir ...

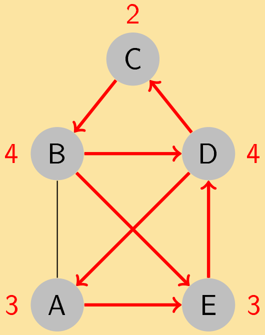


Voyons sur l'exemple de l'enveloppe:
on sait qu'il existe une promenade!

Il faut partir de A et finir en E (ou l'inverse)

Essayons en partant de B, pour voir ...

Perdu !!!



Condition d'existence

- Les conditions trouvées sont sûrement nécessaires.

Condition d'existence

- Les conditions trouvées sont sûrement nécessaires.
- Sont-elles suffisantes?

Théorème d'Euler

On peut dessiner les arêtes d'un graphe sans lever son crayon si et seulement si

- il est possible d'aller de tout point à tout autre en passant par une suite d'arêtes

Théorème d'Euler

On peut dessiner les arêtes d'un graphe sans lever son crayon si et seulement si

- il est possible d'aller de tout point à tout autre en passant par une suite d'arêtes
- en tout sommet, sauf éventuellement deux d'entre eux, arrivent un nombre pair d'arêtes

Théorème d'Euler

On peut dessiner les arêtes d'un graphe sans lever son crayon si et seulement si

- il est possible d'aller de tout point à tout autre en passant par une suite d'arêtes
- en tout sommet, sauf éventuellement deux d'entre eux, arrivent un nombre pair d'arêtes

Théorème d'Euler (version savante)

Un graphe admet un chemin eulérien si et seulement si

- le graphe est connexe
- deux sommets au plus sont de degré impair, tous les autres étant de degré pair

Le théorème est-il vrai?

- En mathématique, il faut une démonstration générale

Le théorème est-il vrai?

- En mathématique, il faut une démonstration générale
- Nous avons (essentiellement) prouvé la nécessité

Le théorème est-il vrai?

- En mathématique, il faut une démonstration générale
- Nous avons (essentiellement) prouvé la nécessité
- Euler n'a pas démontré la suffisance

Le théorème est-il vrai?

- En mathématique, il faut une démonstration générale
- Nous avons (essentiellement) prouvé la nécessité
- Euler n'a pas démontré la suffisance
- Un certain Hierholzer l'aurait fait en 1873

Le théorème est-il vrai?

- En mathématique, il faut une démonstration générale
- Nous avons (essentiellement) prouvé la nécessité
- Euler n'a pas démontré la suffisance
- Un certain Hierholzer l'aurait fait en 1873
- Démonstration constructive : *algorithme*

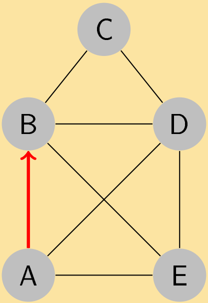
Algorithme = recette de cuisine qui ne rate jamais

- partir d'un sommet de degré impair s'il y en a un (sinon, on part d'où l'on veut)

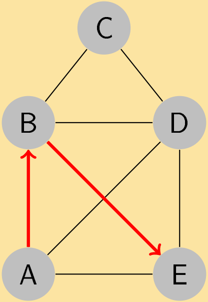
Algorithme = recette de cuisine qui ne rate jamais

- partir d'un sommet de degré impair s'il y en a un (sinon, on part d'où l'on veut)
- quand on quitte un sommet quel qu'il soit, veiller à ne pas disconnecter le graphe
  formé par les arêtes non encore dessinées

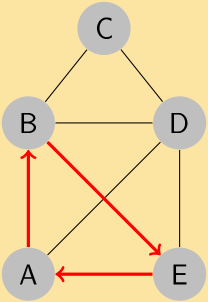
Dans le cas de l'enveloppe, il y a moyen de mal faire!



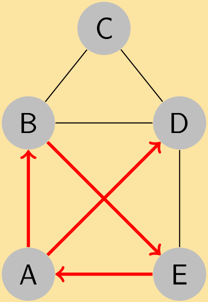
Dans le cas de l'enveloppe, il y a moyen de mal faire!



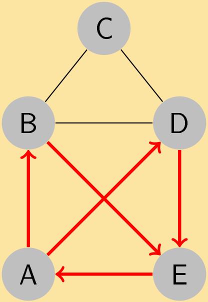
Dans le cas de l'enveloppe, il y a moyen de mal faire!



Dans le cas de l'enveloppe, il y a moyen de mal faire!



Dans le cas de l'enveloppe, il y a moyen de mal faire!



Est-ce bien sérieux ?

1ère réponse:

- Plus important que cela en a l'air puisque ...

Est-ce bien sérieux ?

1ère réponse:

- Plus important que cela en a l'air puisque ...

Est-ce bien sérieux ?

2ème réponse:

- Quantité de problèmes sérieux peuvent être formulés à l'aide de graphes ...

Est-ce bien sérieux ?

2ème réponse:

- Quantité de problèmes sérieux peuvent être formulés à l'aide de graphes ...
- ...et leur résolution a une importance économique considérable

Graphe	Nœuds	Arc/Arêtes
Transport	Carrefours	Routes
Internet	Ordinateurs	Connexions
Web	Pages web	Hyperliens
Social	Personnes	Relations
Chaîne alimentaire	Espèces	Prédateur-proies
Logiciel	Fonctions	Appels
Ordonnancement	Tâches	Précédence
Circuits	Portes	Fils, liaisons

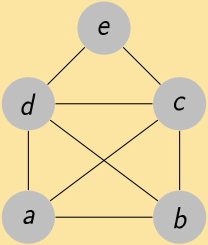
Définitions: graphe

Graphe non orienté

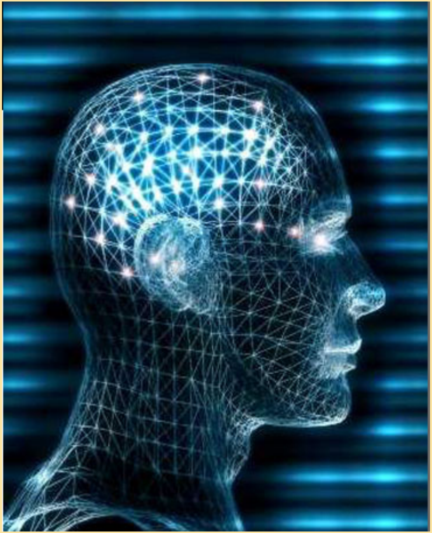
$G = (X, E)$

X ensemble des *sommets* (ou *nœuds*) du graphe
(en nombre fini n)

E ensemble des *arêtes* du graphe,
c'est-à-dire des sous-ensembles de deux sommets
(en nombre $m \leq n(n-1)/2$)



Un réseau vaut plus par ses connexions que par ses nœuds



Réseau social (Erdös)

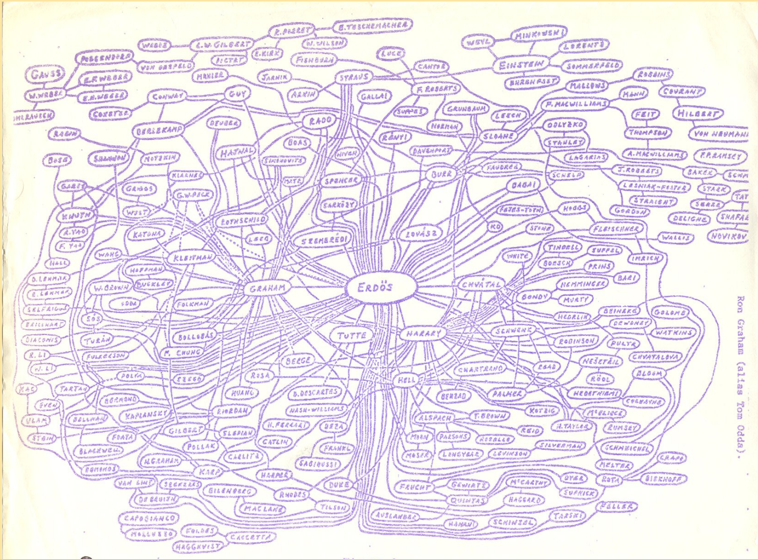
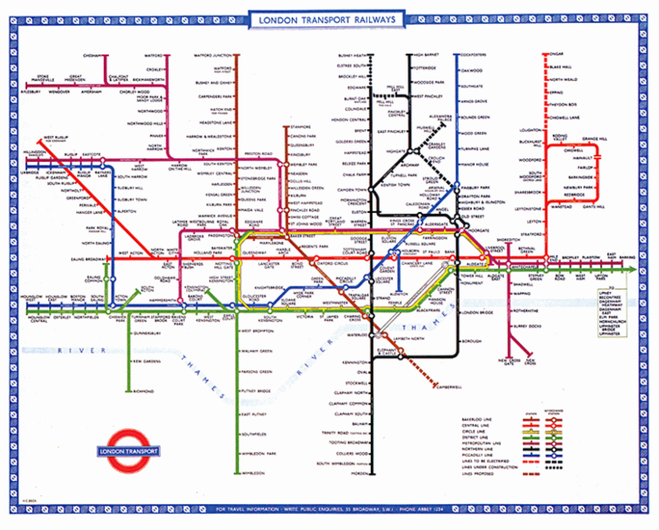


Figure 1
To appear in Topics in Graph Theory (F. Harary, ed.) New York Academy of Sciences (1979).

Réseau social (Entreprises)

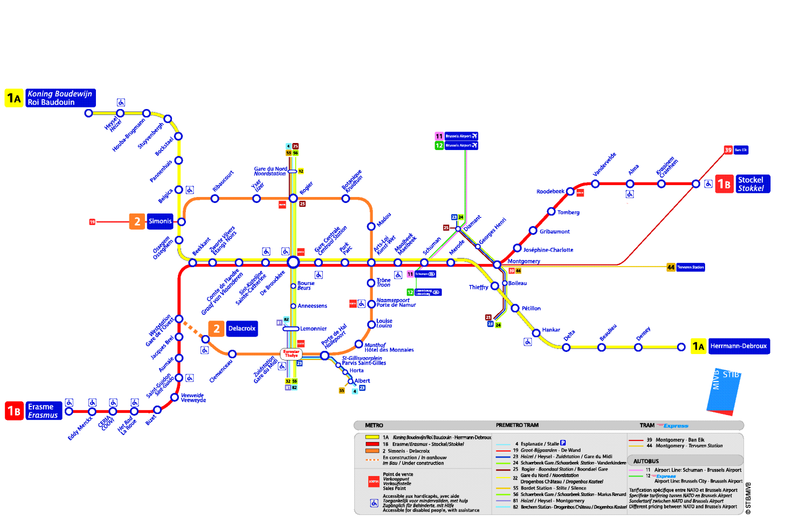
Réseau de transport

à Londres

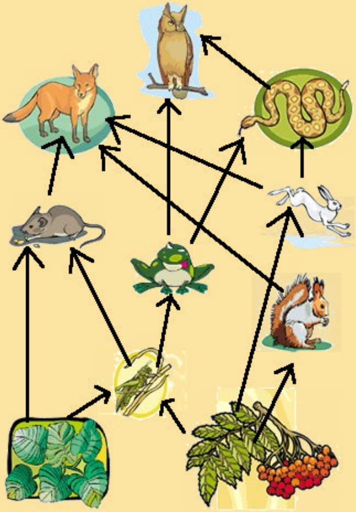


Réseau de transport

à Londres ou à Bruxelles

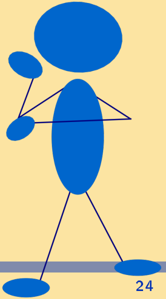


Un morceau de la chaîne alimentaire



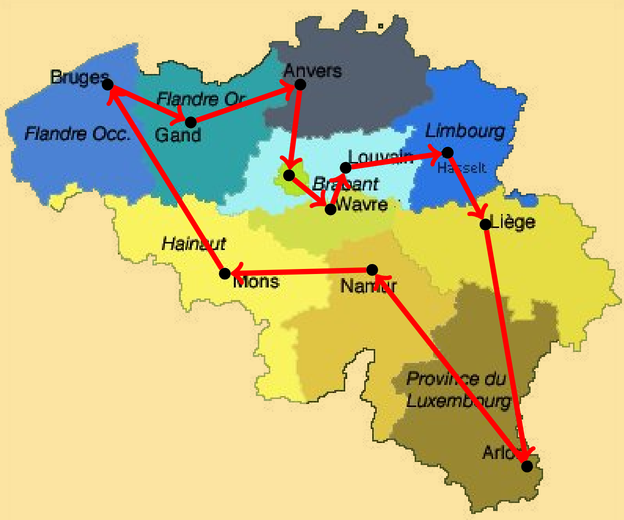
Un tour des capitales provinciales

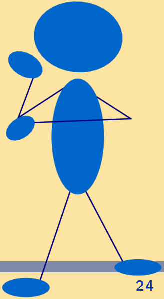
Un tour des capitales provinciales



Un tour des capitales provinciales

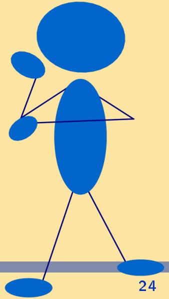
Deux tours concurrents: Bruxelles est-elle en Flandres ou en Wallonie ?





Un tour des capitales provinciales

Deux tours concurrents: Bruxelles est-elle en Flandres ou en Wallonie ?



Voici un problème légèrement différent du problème d'Euler:

Voici un problème légèrement différent du problème d'Euler:

- trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet d'un graphe

Voici un problème légèrement différent du problème d'Euler:

- trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet d'un graphe

c'est le problème du chemin hamiltonien

Voici un problème légèrement différent du problème d'Euler:

- trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet d'un graphe

c'est le problème du chemin hamiltonien

On a donc:

Voici un problème légèrement différent du problème d'Euler:

- trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet d'un graphe

c'est le problème du chemin hamiltonien

On a donc:

Chemins ou cycles eulériens passer une et une seule fois par chaque arête d'un graphe

Voici un problème légèrement différent du problème d'Euler:

- trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet d'un graphe

c'est le problème du chemin hamiltonien

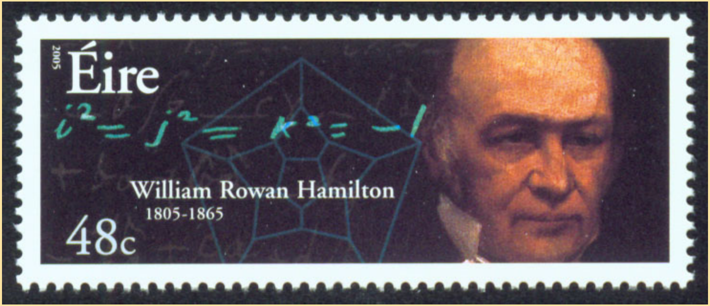
On a donc:

Chemins ou cycles eulériens passer une et une seule fois par chaque arête d'un graphe

Chemins ou cycles hamiltoniens passer une et une seule fois par chaque sommet d'un graphe

Chemin hamiltonien et Voyageur de commerce

W. R. Hamilton (1805-1865), mathématicien irlandais, inventeur des quaternions



Chemin hamiltonien et Voyageur de commerce

Deux versions du problème:

Existence Existe-t-il un chemin (ou un cycle) passant une et une seule fois par tous les sommets d'un graphe?

Optimisation Quel est le plus court chemin (ou cycle) passant par tous les sommets d'un graphe?

En "optimisation" = problème du voyageur de commerce (TSP)

- suppose que des valeurs sont associées aux arêtes

Chemin hamiltonien et Voyageur de commerce

Deux versions du problème:

Existence Existe-t-il un chemin (ou un cycle) passant une et une seule fois par tous les sommets d'un graphe?

Optimisation Quel est le plus court chemin (ou cycle) passant par tous les sommets d'un graphe?

En "optimisation" = problème du voyageur de commerce (TSP)

- suppose que des valeurs sont associées aux arêtes
  - temps de parcours

Chemin hamiltonien et Voyageur de commerce

Deux versions du problème:

Existence Existe-t-il un chemin (ou un cycle) passant une et une seule fois par tous les sommets d'un graphe?

Optimisation Quel est le plus court chemin (ou cycle) passant par tous les sommets d'un graphe?

En "optimisation" = problème du voyageur de commerce (TSP)

- suppose que des valeurs sont associées aux arêtes
  - temps de parcours
  - coût

Chemin hamiltonien et Voyageur de commerce

Deux versions du problème:

Existence Existe-t-il un chemin (ou un cycle) passant une et une seule fois par tous les sommets d'un graphe?

Optimisation Quel est le plus court chemin (ou cycle) passant par tous les sommets d'un graphe?

En "optimisation" = problème du voyageur de commerce (TSP)

- suppose que des valeurs sont associées aux arêtes
  - temps de parcours
  - coût
  - ...

Applications du “voyageur de commerce”

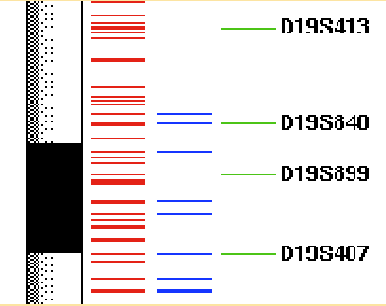
- tournée d'un camion de livraison

Applications du “voyageur de commerce”

- tournée de ramassage de déchets (propreté publique)
- optimiser la production de tableaux de bord de voitures
  - carnet de commande: 500 noirs, 300 bruns, 400 beiges
  - temps de nettoyage de l'extrudeuse:
    noir-beige > noir-brun > brun-beige > beige-noir > . . .
  - dans quel ordre réaliser les commandes
    de façon à minimiser le temps de nettoyage ?
- ...

Applications du “voyageur de commerce”

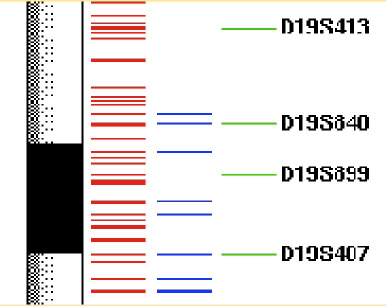
- Séquencement du génome de la souris



  - cartes locales à intégrer dans carte globale

Applications du “voyageur de commerce”

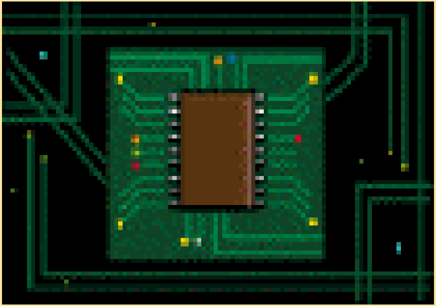
- Séquencement du génome de la souris



  - cartes locales à intégrer dans carte globale
  - villes = cartes locales
  - distance = vraisemblance pour qu'une carte locale i suive immédiatement une autre j

Applications du “voyageur de commerce”

- Chaîne de vérification des circuits intégrés



  - scan-chain = routes incluses dans le chip, dans le but de tester le circuit
  - minimiser sa longueur pour des raisons d'économie de temps et d'énergie

Les problèmes ne sont pas égaux... en difficulté

Optimisation

$$\max \text{ ou } \min f(x)$$

avec $x \in X$, un domaine continu et donc non fini.

Par exemple,

$$\min f(x) = 2x^3 + 10x^2 - 7$$

pour $x \in X = [-7, 8]$.

Les problèmes ne sont pas égaux. . . en difficulté

Optimisation

$$\max \text{ ou } \min f(x)$$

avec $x \in X$, un domaine continu et donc non fini.

Par exemple,

$$\min f(x) = 2x^3 + 10x^2 - 7$$

pour $x \in X = [-7, 8]$.

Optimisation combinatoire

$$\max \text{ ou } \min f(x)$$

avec $x \in X$, un domaine discret et généralement fini.

Par exemple,

$$\min \text{longueur du tour } x$$

pour $x \in X$ =ensemble des tours sur n villes.

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions

Continuons avec le problème du voyageur de commerce.
Combien y a-t-il de tours sur n villes ?

Nb villes	Nb solutions	
5	$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5} =$	24

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions

Continuons avec le problème du voyageur de commerce.
Combien y a-t-il de tours sur n villes ?

Nb villes	Nb solutions		
5	$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5}$	$=$	24
6	$5! = 5 \times 24$	$=$	120

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions

Continuons avec le problème du voyageur de commerce.
Combien y a-t-il de tours sur n villes ?

Nb villes	Nb solutions		
5	$\dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5}$	$=$	24
6	$5! = 5 \times 24$	$=$	120
7	$6! = 6 \times 120$	$=$	720
8	$7! = 7 \times 720$	$=$	5 040
9	$8! = 8 \times 5040$	$=$	40 320
10	$9! = 9 \times 40320$	$=$	362 880

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions. . . assez vite ?

Supposons que notre ordinateur évalue 720 solutions en 1 ms.

Nb villes	Nb solutions	Temps
7	$6! = 720$	0,001 s
8	$7! = 7 \times 6!$	0,007 s
9	$8! = 8 \times 7!$	0,056 s
10	$9! = 9 \times 8!$	0,504 s

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions. . . assez vite ?

Supposons que notre ordinateur évalue 720 solutions en 1 ms.

Nb villes	Nb solutions	Temps	
7	$6! = 720$	0,001 s	
8	$7! = 7 \times 6!$	0,007 s	
9	$8! = 8 \times 7!$	0,056 s	
10	$9! = 9 \times 8!$	0,504 s	
15	$14!$	121 080,960 s	$=$ 33 heures

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions... assez vite ?

Supposons que notre ordinateur évalue 720 solutions en 1 ms.

Nb villes	Nb solutions	Temps	
7	$6! = 720$	0,001 s	
8	$7! = 7 \times 6!$	0,007 s	
9	$8! = 8 \times 7!$	0,056 s	
10	$9! = 9 \times 8!$	0,504 s	
15	$14!$	121 080,960 s	= 33 heures
20	$19!$	$1,69\ 10^{11}$ s	= 5 357,4 années

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions... assez vite ?

Supposons que notre ordinateur évalue 720 solutions en 1 ms.

Nb villes	Nb solutions	Temps	
7	$6! = 720$	0,001 s	
8	$7! = 7 \times 6!$	0,007 s	
9	$8! = 8 \times 7!$	0,056 s	
10	$9! = 9 \times 8!$	0,504 s	
15	$14!$	121 080,960 s	= 33 heures
20	$19!$	$1,69\ 10^{11}$ s	= 5 357,4 années

Ça grandit un peu trop vite !

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions... plus vite encore ?

Pour résoudre un TSP à 40 villes

Il y a $39! \sim 10^{46}$ solutions.

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions... plus vite encore ?

Pour résoudre un TSP à 40 villes

Il y a $39! \sim 10^{46}$ solutions.

Construisons un vraiment très gros ordinateur

- Chaque processeur calculerait 10^9 solutions par secondes
  Il serait un prisme d'un micron ($10^{-6}m$) d'épaisseur
  sur une base carré de $1mm$ de côté.
- On placerait 10^9 couches de processeurs (épaisseur =1 km)
  sur tout l'équateur (longueur = 40 000 km)

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions... plus vite encore ?

Pour résoudre un TSP à 40 villes

Il y a $39! \sim 10^{46}$ solutions.

Construisons un vraiment très gros ordinateur

- Chaque processeur calculerait 10^9 solutions par secondes
  Il serait un prisme d'un micron ($10^{-6}m$) d'épaisseur
  sur une base carré de $1mm$ de côté.
- On placerait 10^9 couches de processeurs (épaisseur =1 km)
  sur tout l'équateur (longueur = 40 000 km)

Laissons-le calculer...

L'optimisation combinatoire: facile !?

Il suffirait d'énumérer toutes les solutions... plus vite encore ?

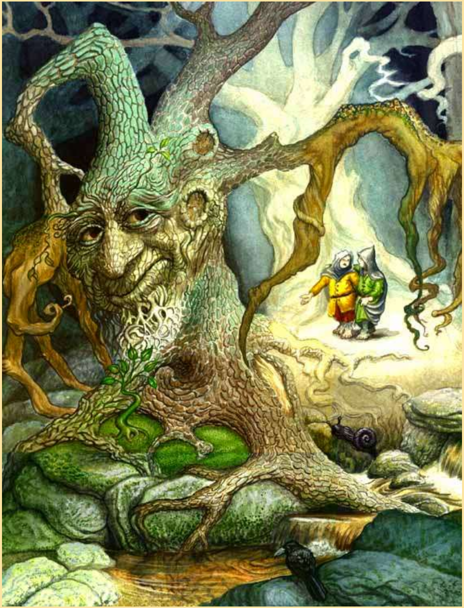
Pour résoudre un TSP à 40 villes

Il y a $39! \sim 10^{46}$ solutions.
Construisons un vraiment très gros ordinateur

- Chaque processeur calculerait 10^9 solutions par secondes
  Il serait un prisme d'un micron ($10^{-6}m$) d'épaisseur
  sur une base carré de $1mm$ de côté.
- On placerait 10^9 couches de processeurs (épaisseur =1 km)
  sur tout l'équateur (longueur = 40 000 km)

Laissons-le calculer...

Nous aurions la réponse après 10^{10} années.



Des arbres qui ne cachent pas la forêt

Donald Knuth: ***The Art of Computer Programming***

"Les arbres constituent la structure
la plus fondamentale de toute l'informatique"

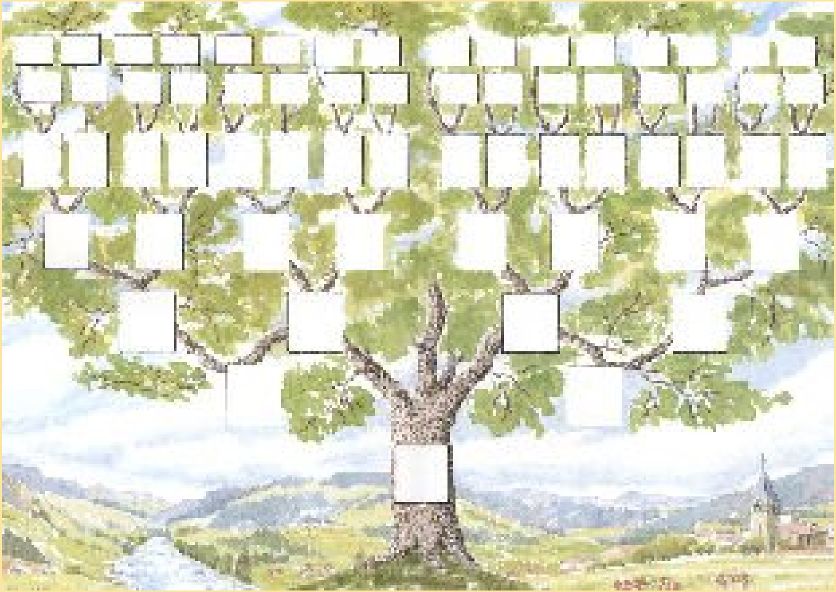
Des arbres qui ne cachent pas la forêt

Donald Knuth: *The Art of Computer Programming*

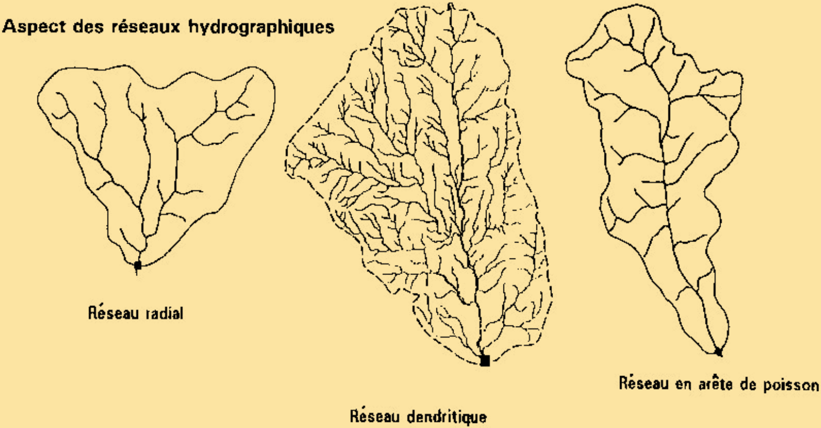
"Les arbres constituent la structure
la plus fondamentale de toute l'informatique"

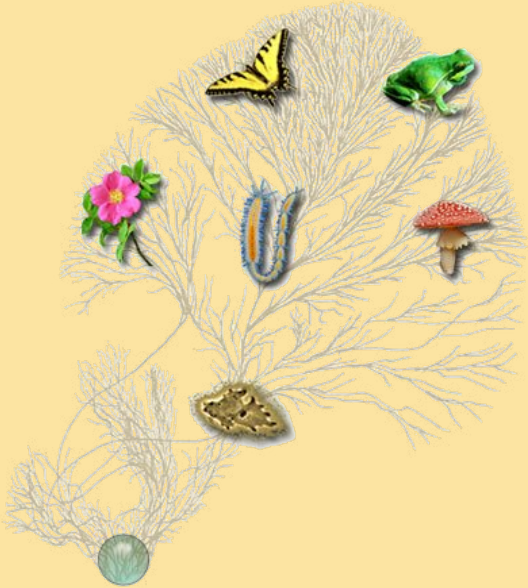
Multiples exemples et applications

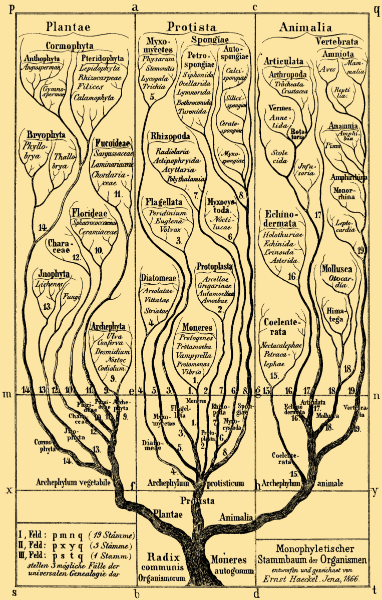
- arbre généalogique
- réseau hydrographique
- classification des espèces vivantes (ou presque vivantes)
- questionnaires
- méthodes "branch and bound" en optimisation combinatoire
- ...

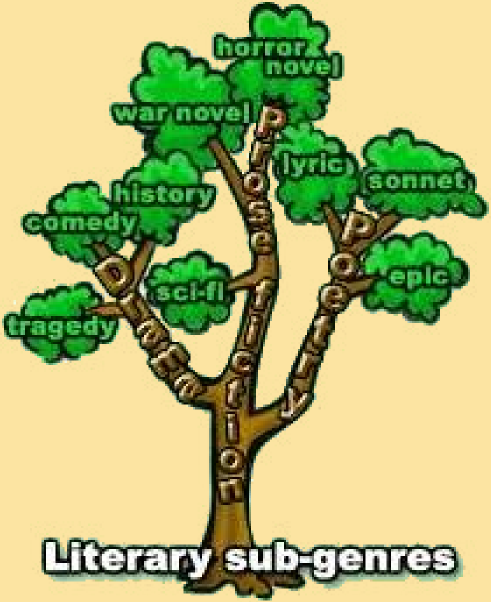


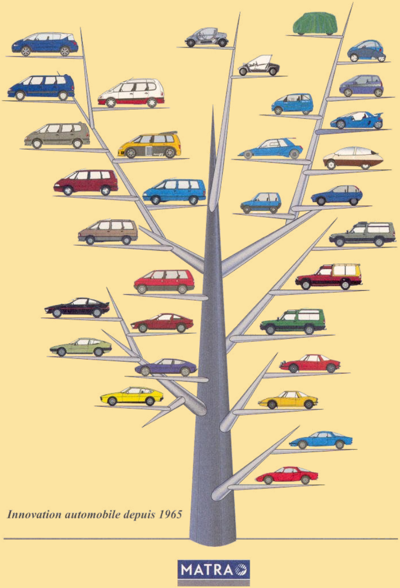

2005 03 19 16:40


Aspect des réseaux hydrographiques
Réseau radial
Réseau dendritique
Réseau en arête de poisson




Plantae
Protista
Animalia
Cormophyta
Anthophyta
Pteridophyta
Bryophyta
Fucoideae
Florideae
Characeae
Jnophyta
Archephyta
Myxomycetes
Spongiae
Rhizopoda
Flagellata
Myxocystoda
Diatomeae
Protoplasta
Moneres
Vertebrata
Amniota
Articulata
Arthropoda
Vermes
Anamnia
Echinodermata
Mollusca
Coelenterata
Archephylum vegetabile
Archephylum protisticum
Archephylum animale
I, Feld: p m n q (19 Stämme)
II, Feld: p x y q (3 Stämme)
III, Feld: p s t q (1 Stamm)
stellen 3 mögliche Fälle der universalen Genealogie dar
Radix communis Organismorum
Moneres autogonum
Monophyletischer Stammbaum der Organismen
entworfen und gezeichnet von Ernst Haeckel. Jena, 1866.


horror novel
war novel
lyric
sonnet
history
comedy
sci-fi
epic
tragedy
prose fiction
poetry
Literary sub-genres


Innovation automobile depuis 1965
MATRA

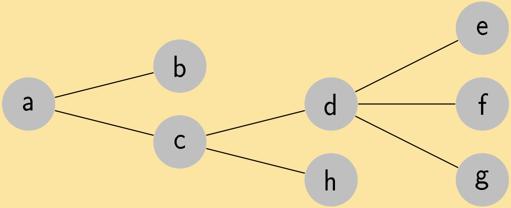
Définitions: arbre

Arbre

Un arbre est un graphe *connexe* et *sans cycle*

connexe : il existe un chemin non-orienté (une *chaîne*) entre toute paire de sommets

sans cycle : il n'existe pas de chaîne partant d'un sommet et revenant à ce sommet



Définitions: forêt

Forêt

Un graphe sans cycle est appelé une *forêt*;
ses composantes connexes sont des arbres.

Définitions: forêt

Forêt

Un graphe sans cycle est appelé une *forêt*;
ses composantes connexes sont des arbres.

Propriétés élégantes des arbres

À justifier comme exercice de démonstration

Dans tout arbre (sur un ensemble fini de sommets):

- il existe au moins un sommet qui n'appartient qu'à une seule arête (une *feuille*);

Propriétés élégantes des arbres

À justifier comme exercice de démonstration

Dans tout arbre (sur un ensemble fini de sommets):

- il existe au moins un sommet qui n'appartient qu'à une seule arête (une *feuille*);
- s'il y a n sommets, il y a $(n-1)$ arêtes;

Propriétés élégantes des arbres

À justifier comme exercice de démonstration

Dans tout arbre (sur un ensemble fini de sommets):

- il existe au moins un sommet qui n'appartient qu'à une seule arête (une *feuille*);
- s'il y a n sommets, il y a $(n-1)$ arêtes;
- l'ajout d'une arête crée un et un seul cycle;

Propriétés élégantes des arbres

À justifier comme exercice de démonstration

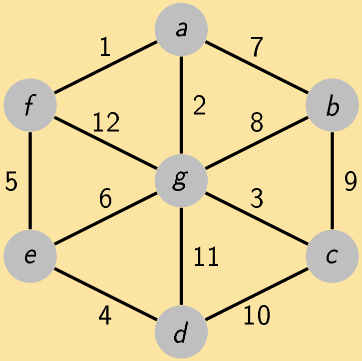
Dans tout arbre (sur un ensemble fini de sommets):

- il existe au moins un sommet qui n'appartient qu'à une seule arête (une *feuille*);
- s'il y a n sommets, il y a $(n-1)$ arêtes;
- l'ajout d'une arête crée un et un seul cycle;
- chaque paire de sommets est reliée par une chaîne et une seule; la suppression d'une arête disconnecte le graphe et crée exactement deux composantes connexes.

Exemple: Réseau de télécom

Arbre couvrant minimum

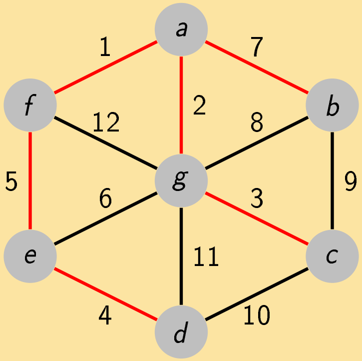
Relier à moindre coût un ensemble de centraux téléphoniques par des faisceaux de fibres optiques de façon à pouvoir envoyer un message de tout central à tout autre



Exemple: Réseau de télécom

Arbre couvrant minimum

Relier à moindre coût un ensemble de centraux téléphoniques par des faisceaux de fibres optiques de façon à pouvoir envoyer un message de tout central à tout autre



Définition

Soit $G = (X, E, f)$ un graphe non-orienté *valué* (à chaque arête e est associé un coût $f(e)$). On suppose que G est *connexe*.

Définition

Soit $G = (X, E, f)$ un graphe non-orienté *valué* (à chaque arête e est associé un coût $f(e)$). On suppose que G est *connexe*.

Définition

L'*arbre couvrant minimum* de G est l'arbre sur X dont l'ensemble des arêtes F, inclus à E, est de coût minimum:

$$\sum_{e \in F} f(e) \quad \text{est minimum.}$$

Propriété fondamentale

Proposition

- Soit $G = (X, E, f)$ un graphe non-orienté valué connexe.
- On suppose que toutes les arêtes ont un coût différent (en cas d'égalité, on brise arbitrairement les ex aequo)
- Soit (X_1, X_2) une partition quelconque de X en deux sous-ensembles.

Alors,

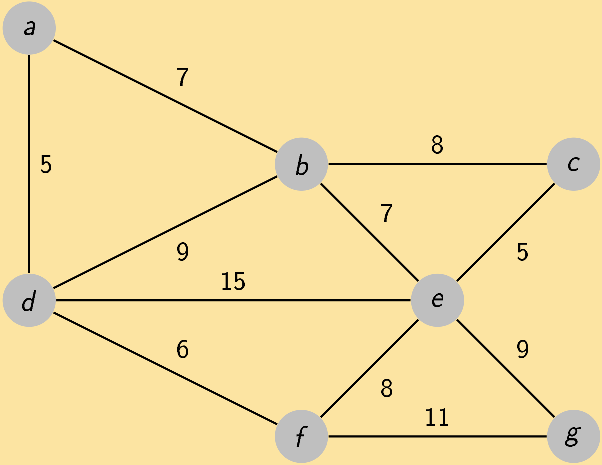
L'arbre couvrant minimum de G contient toujours l'arête de coût minimum joignant X_1 à X_2.

Algorithme de Kruskal

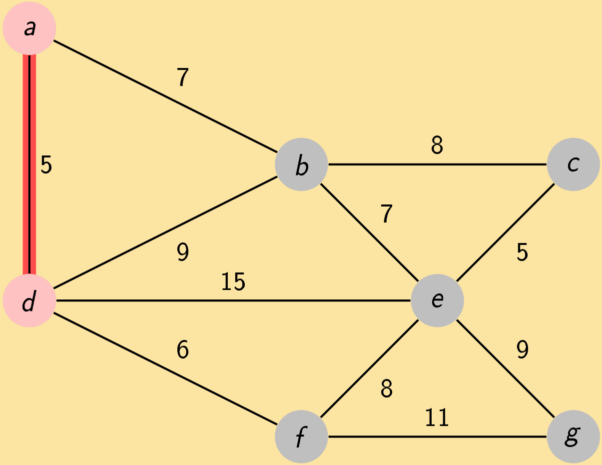
Un algorithme glouton

- Ranger les arêtes par coût croissant.
- Parcourir les arêtes dans cet ordre en retenant toutes les arêtes *qui ne créent pas de cycle* avec les arêtes déjà sélectionnées.
- Stop lorsque $n - 1$ arêtes ont été sélectionnées.

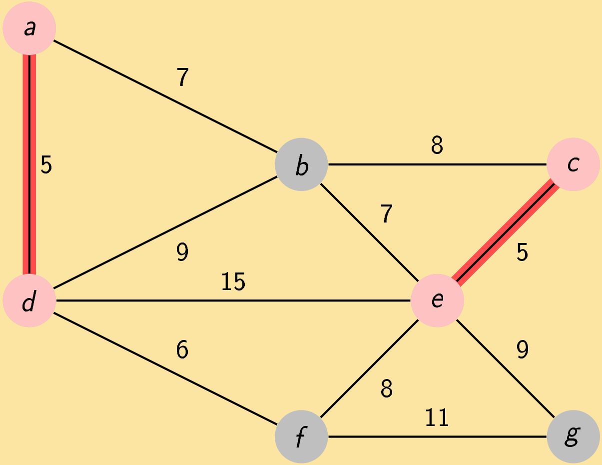
Kruskal au travail



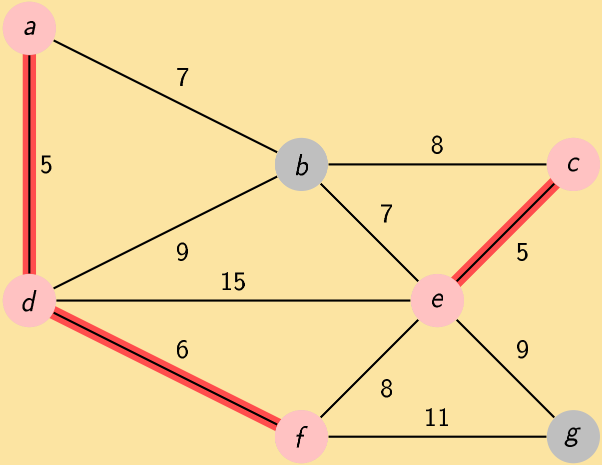
Kruskal au travail



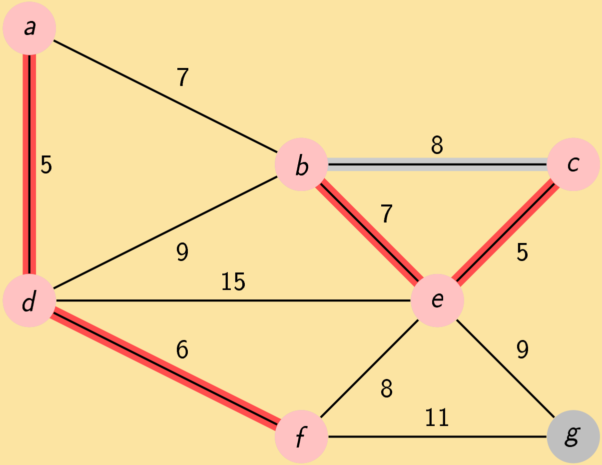
Kruskal au travail



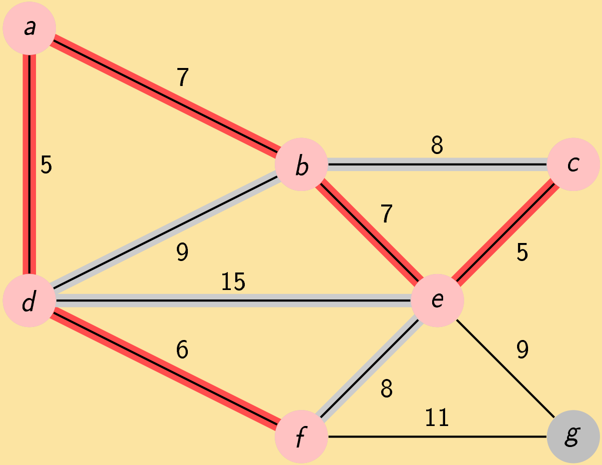
Kruskal au travail



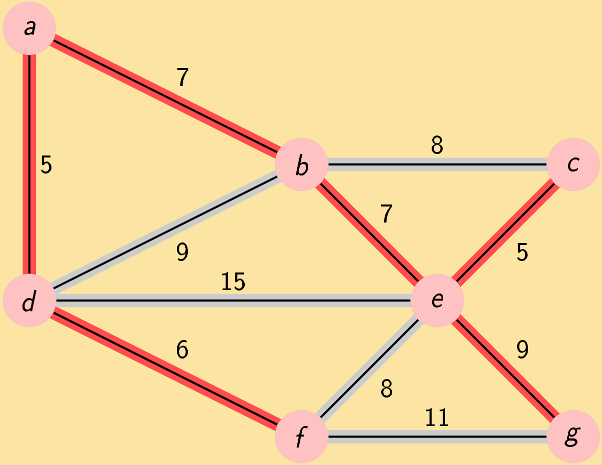
Kruskal au travail



Kruskal au travail



Kruskal au travail



Algorithmes gloutons (greedy)

- L'algorithme de Kruskal est dit *glouton* car à chaque étape il choisit d'ajouter l'arête la moins chère: recherche du profit immédiat

Algorithmes gloutons (greedy)

- L'algorithme de Kruskal est dit *glouton* car à chaque étape il choisit d'ajouter l'arête la moins chère: recherche du profit immédiat
- Est-ce une stratégie optimale? Dans ce problème-ci, oui! Mais ce n'est pas le cas en général; une stratégie gloutonne n'est pas optimale pour le problème du voyageur de commerce par exemple.

Algorithmes gloutons (greedy)

- L'algorithme de Kruskal est dit *glouton* car à chaque étape il choisit d'ajouter l'arête la moins chère: recherche du profit immédiat
- Est-ce une stratégie optimale? Dans ce problème-ci, oui! Mais ce n'est pas le cas en général; une stratégie gloutonne n'est pas optimale pour le problème du voyageur de commerce par exemple.

Complexité de l'algorithme de Kruskal

- **Complexité d'un algorithme:** nombre maximal d'opérations nécessaires pour résoudre le problème dans le pire des cas; c'est une fonction de la taille du problème.

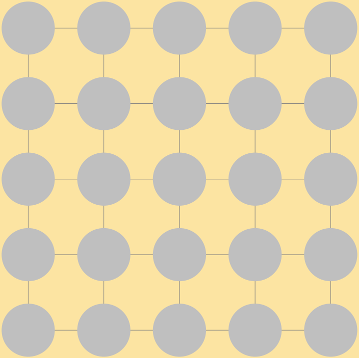
Algorithmes gloutons (greedy)

- L'algorithme de Kruskal est dit *glouton* car à chaque étape il choisit d'ajouter l'arête la moins chère: recherche du profit immédiat
- Est-ce une stratégie optimale? Dans ce problème-ci, oui! Mais ce n'est pas le cas en général; une stratégie gloutonne n'est pas optimale pour le problème du voyageur de commerce par exemple.

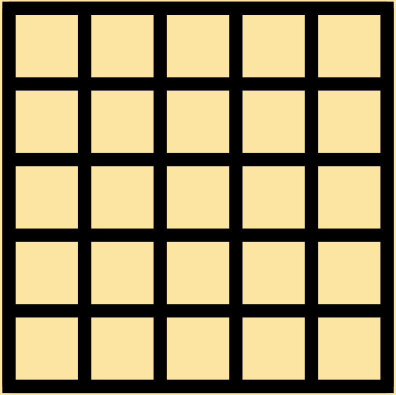
Complexité de l'algorithme de Kruskal

- **Complexité d'un algorithme:** nombre maximal d'opérations nécessaires pour résoudre le problème dans le pire des cas; c'est une fonction de la taille du problème.
- La complexité de l'algorithme de Kruskal est en $\mathcal{O}(n^2)$.

Kruskal dessine de bons labyrinthes

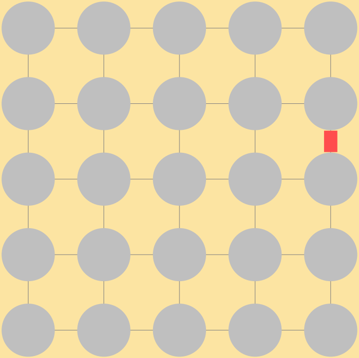


Itérations sur le graphe

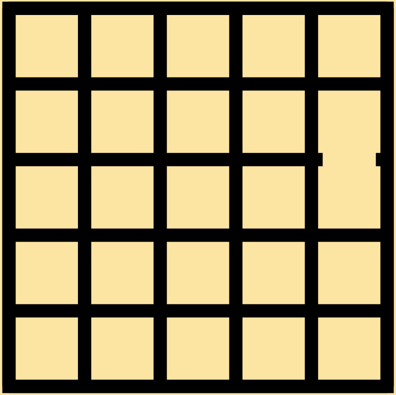


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

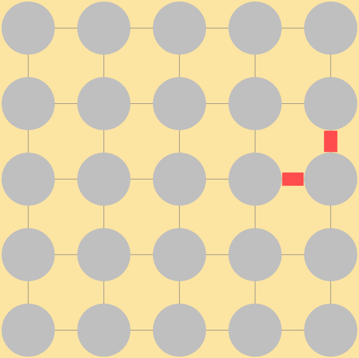


Itérations sur le graphe

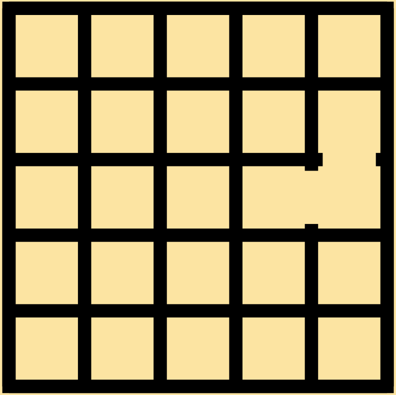


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

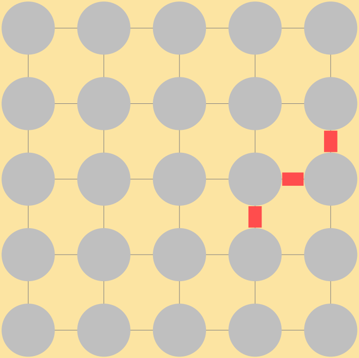


Itérations sur le graphe

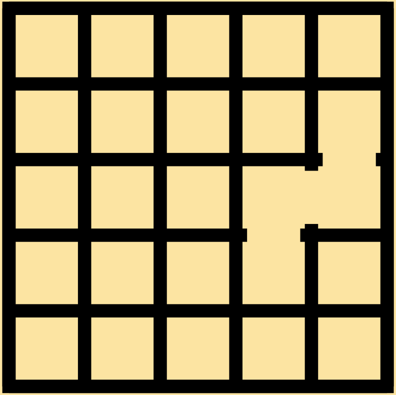


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

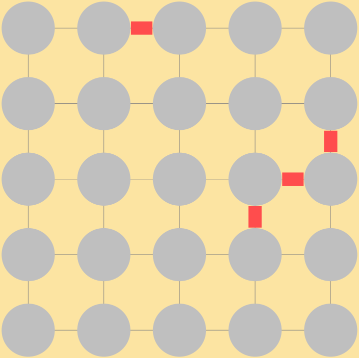


Itérations sur le graphe

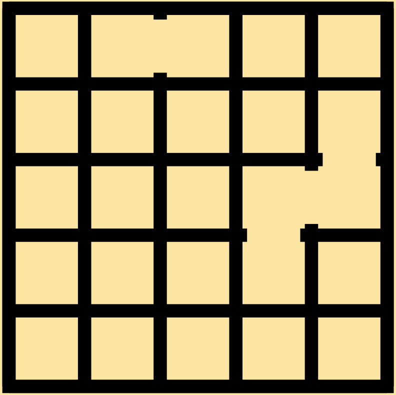


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

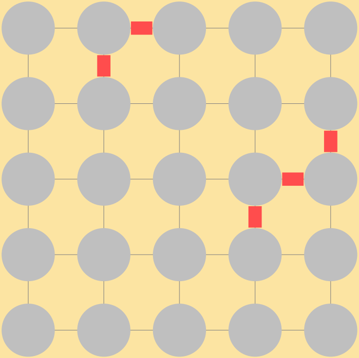


Itérations sur le graphe

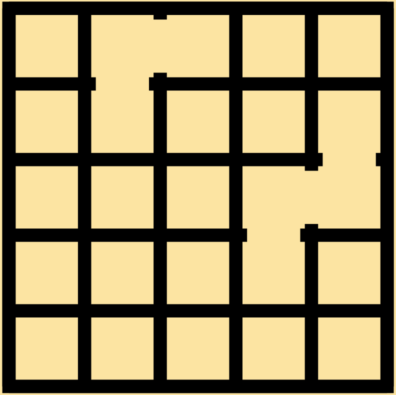


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

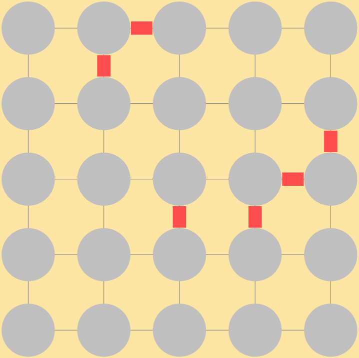


Itérations sur le graphe

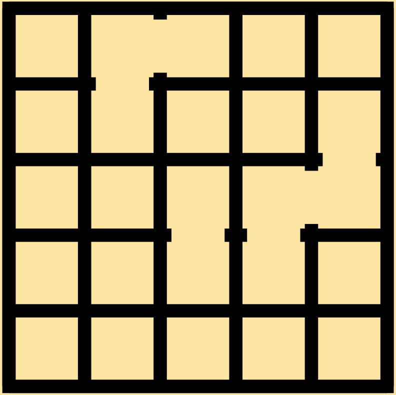


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

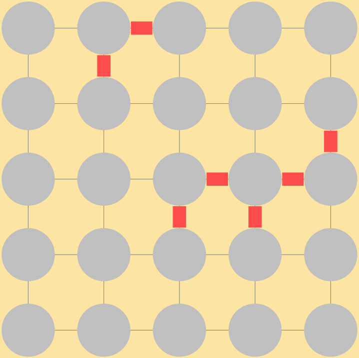


Itérations sur le graphe

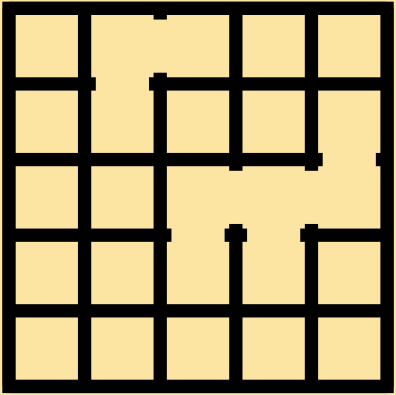


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

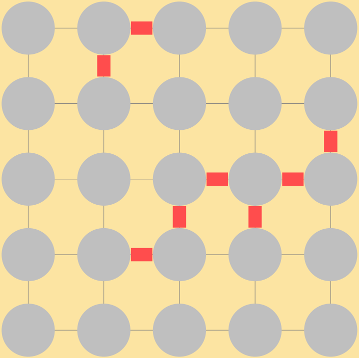


Itérations sur le graphe

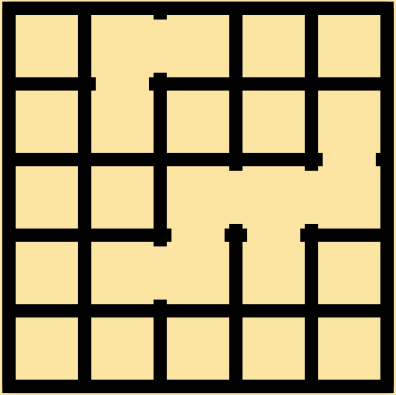


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

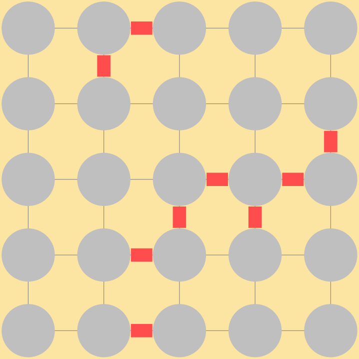


Itérations sur le graphe

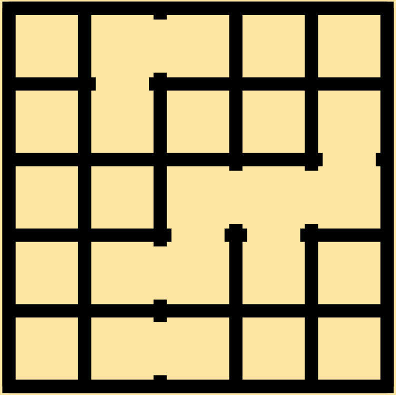


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

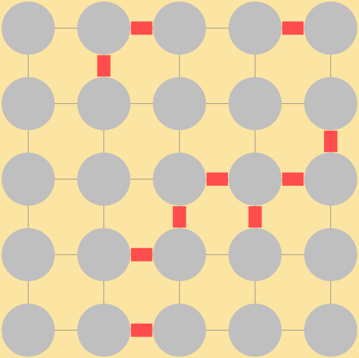


Itérations sur le graphe

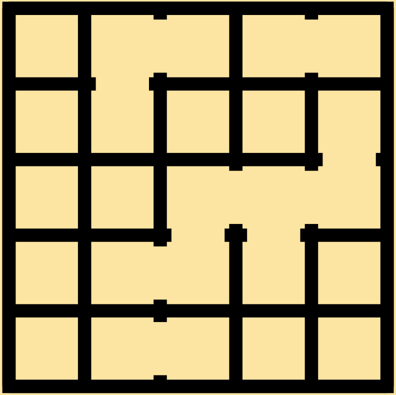


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

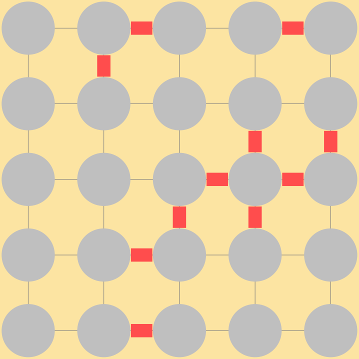


Itérations sur le graphe

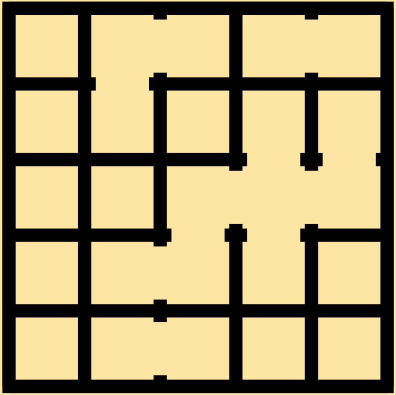


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

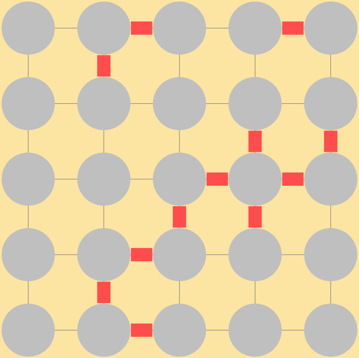


Itérations sur le graphe

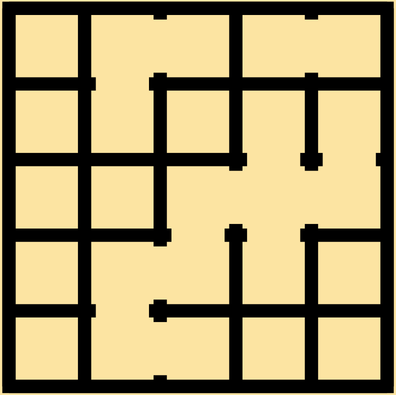


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

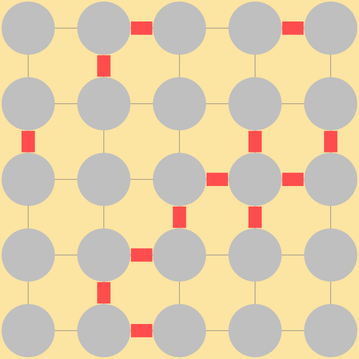


Itérations sur le graphe

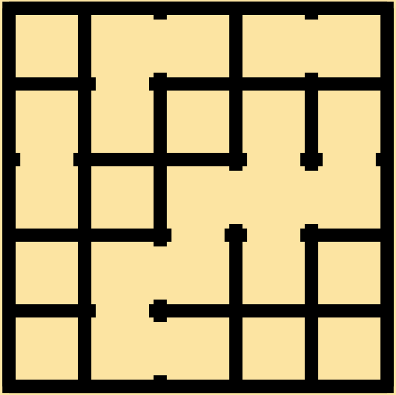


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

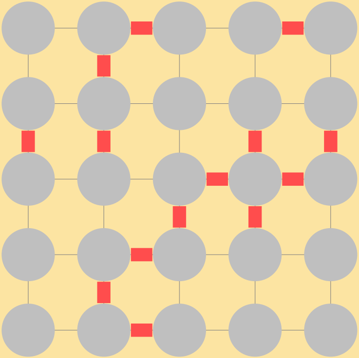


Itérations sur le graphe

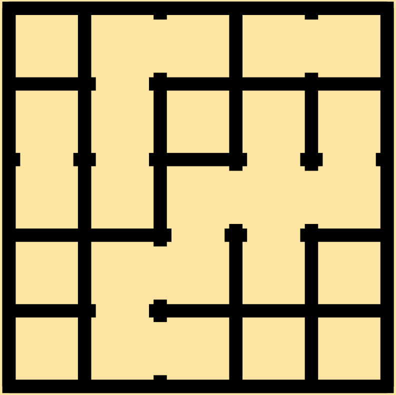


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

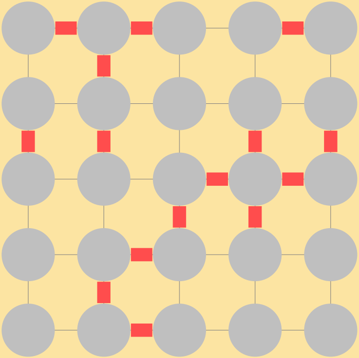


Itérations sur le graphe

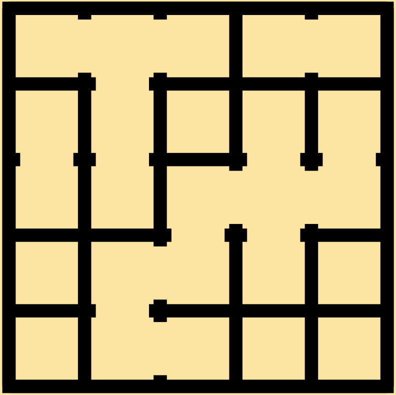


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

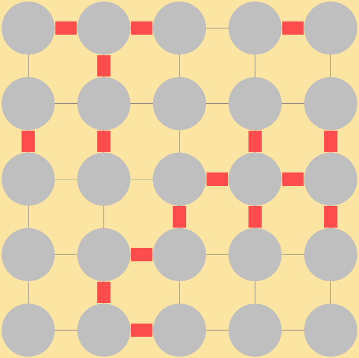


Itérations sur le graphe

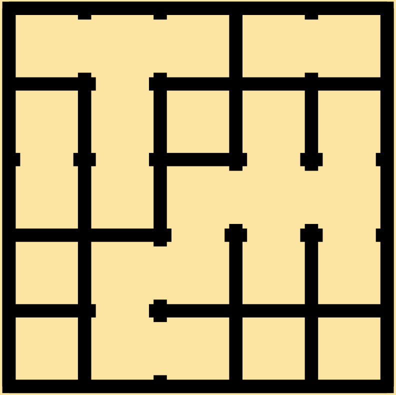


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

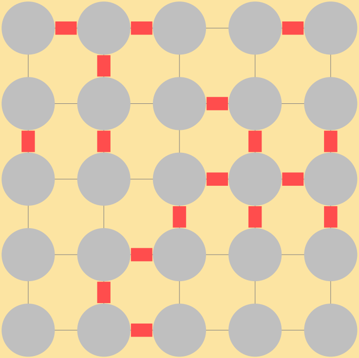


Itérations sur le graphe

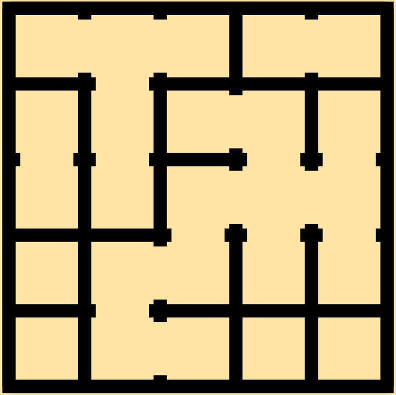


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

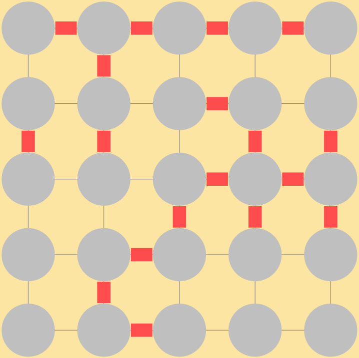


Itérations sur le graphe

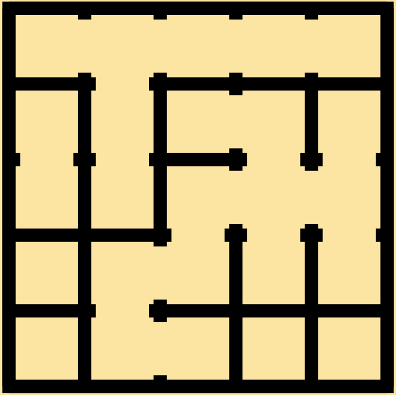


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

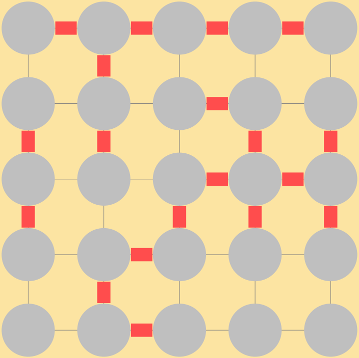


Itérations sur le graphe

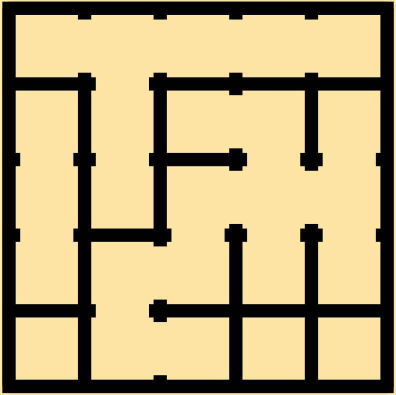


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

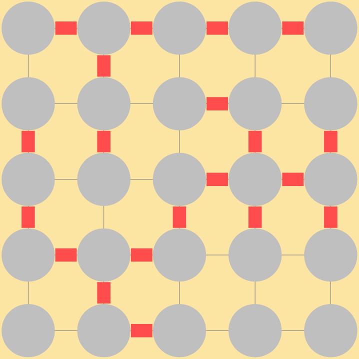


Itérations sur le graphe

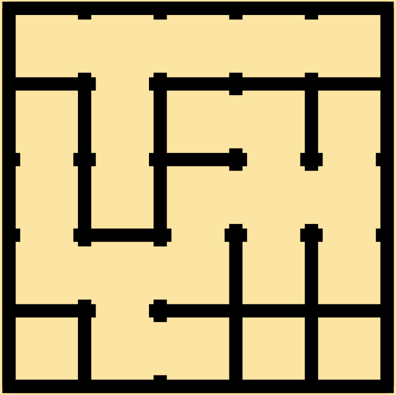


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

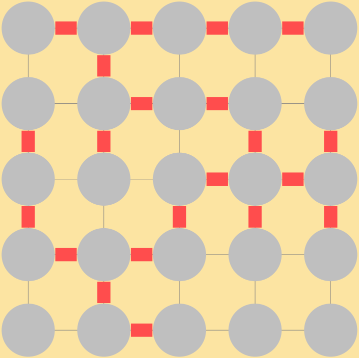


Itérations sur le graphe

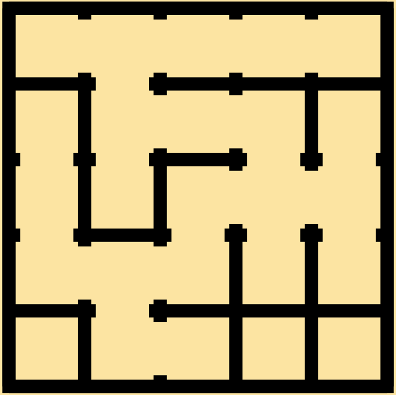


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

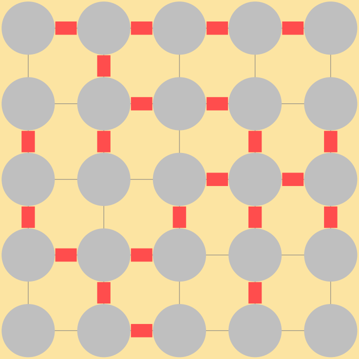


Itérations sur le graphe

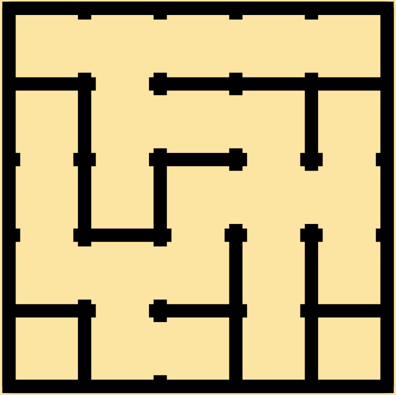


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

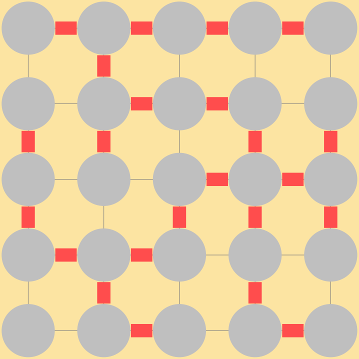


Itérations sur le graphe

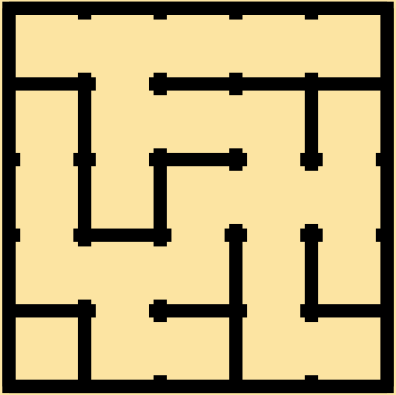


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

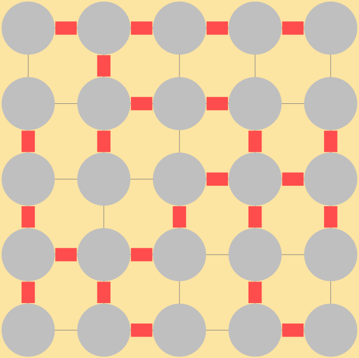


Itérations sur le graphe

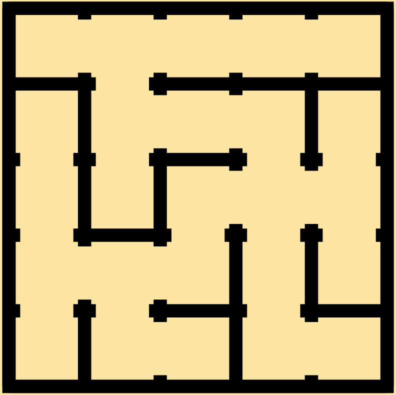


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes

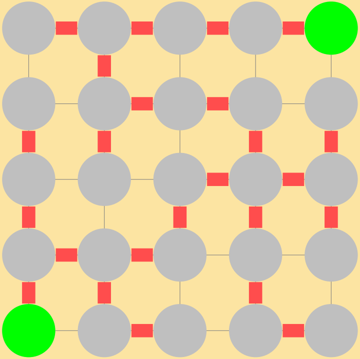


Itérations sur le graphe

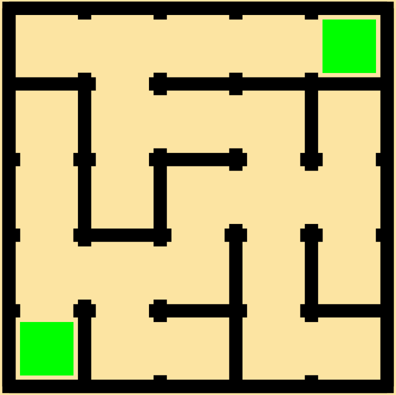


Itérations sur le labyrinthe

Kruskal dessine de bons labyrinthes



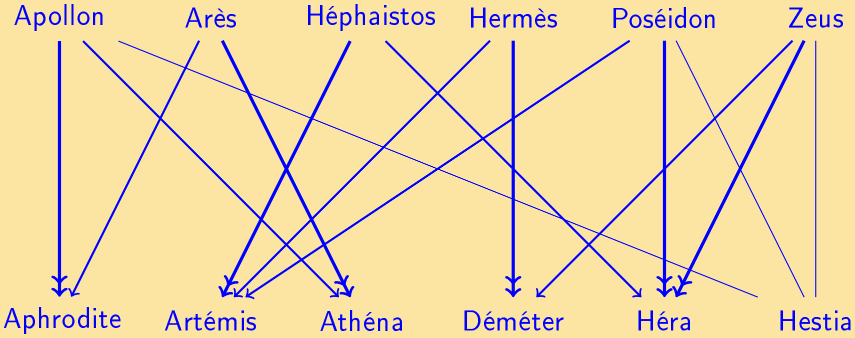
Itérations sur le graphe



Itérations sur le labyrinthe

L'affectation

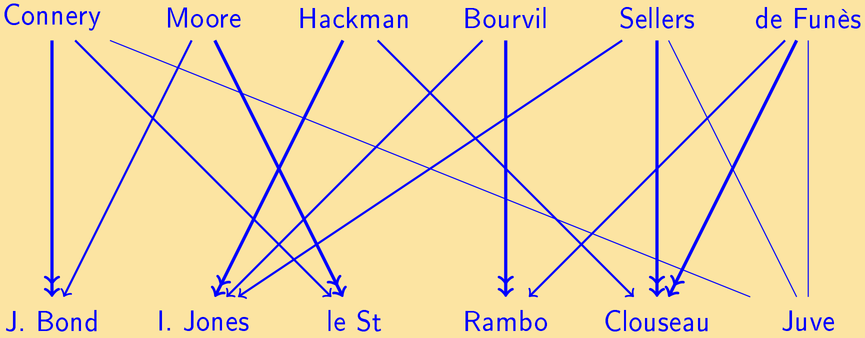
Un autre problème simple



Mariage, casting, ...

L'affectation

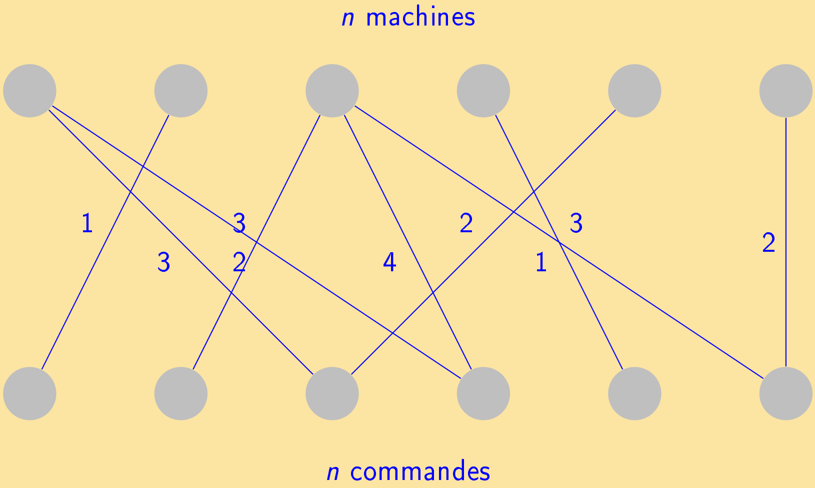
Un autre problème simple



Mariage, casting, . . .

L'affectation

Un autre problème simple... en plus sérieux



Affectation de n commandes à n machines,
pour minimiser la somme des temps d'exécution.

Des problèmes de complexité différente

Complexité d'un algorithme décrit la pire évolution de la quantité de calcul de l'algorithme, quand la taille du problème n augmente.

Complexité d'un problème vaut la complexité du meilleur algorithme pour ce type de problèmes.

en termes d'ordre de grandeur.

Complexité de l'Affectation en $\mathcal{O}(n^4)$

Complexité de l'Arbre couvrant en $\mathcal{O}(n^2)$

Des problèmes de complexité différente

n	10	30	50	60
n^2	1 ms	9 ms	25 ms	36 ms
n^3	1 ms	27 ms	125 ms	216 ms
n^4	1 ms	81 ms	625 ms	1 296 ms

Des problèmes de complexité différente

n	10	30	50	60
n^2	1 ms	9 ms	25 ms	36 ms
n^3	1 ms	27 ms	125 ms	216 ms
n^4	1 ms	81 ms	625 ms	1 296 ms
2^n	1 ms	17,9 min	35,7 ans	366 siècles

Des problèmes de complexité différente

n	10	30	50	60
n^2	1 ms	9 ms	25 ms	36 ms
n^3	1 ms	27 ms	125 ms	216 ms
n^4	1 ms	81 ms	625 ms	1 296 ms
2^n	1 ms	17,9 min	35,7 ans	366 siècles

En pratique

Croissance polynomiale jouable, si on n'est pas trop pressé.

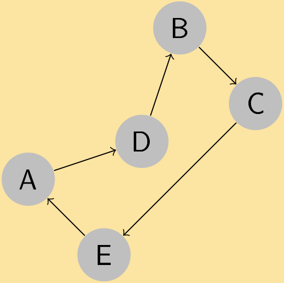
Croissance exponentielle (ou pire) devient très vite intraitable.

Le TSP et l'affectation

Une comparaison curieuse

Le TSP est une affectation avec des contraintes supplémentaires.

Tout tour peut se représenter comme une affectation

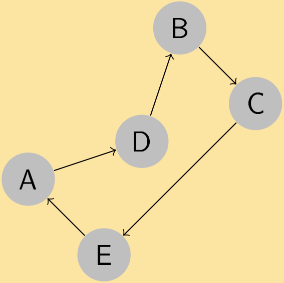


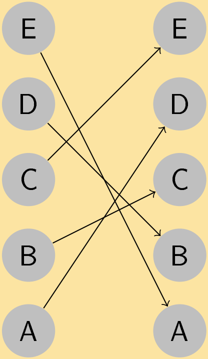
Le TSP et l'affectation

Une comparaison curieuse

Le TSP est une affectation avec des contraintes supplémentaires.

Tout tour peut se représenter comme une affectation



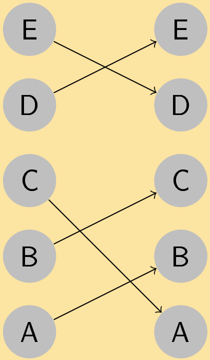


Le TSP et l'affectation

Une comparaison curieuse

Le TSP est une affectation avec des contraintes supplémentaires.

Toute affectation ne représente pas un tour:

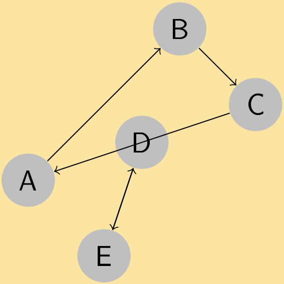


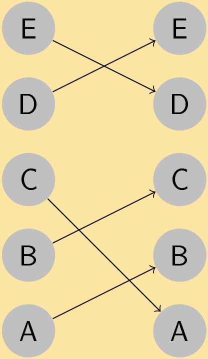
Le TSP et l'affectation

Une comparaison curieuse

Le TSP est une affectation avec des contraintes supplémentaires.

Toute affectation ne représente pas un tour:





Le TSP et l'affectation

Une comparaison curieuse

Le TSP est une affectation avec des contraintes supplémentaires.

Il y a moins de solutions pour un TSP

- Tout tour peut se représenter comme une affectation
- Toute affectation ne représente pas un tour

La contrainte supplémentaire élimine les sous-tours

Le TSP et l'affectation

Une comparaison curieuse

Le TSP est une affectation avec des contraintes supplémentaires.

Il y a moins de solutions pour un TSP

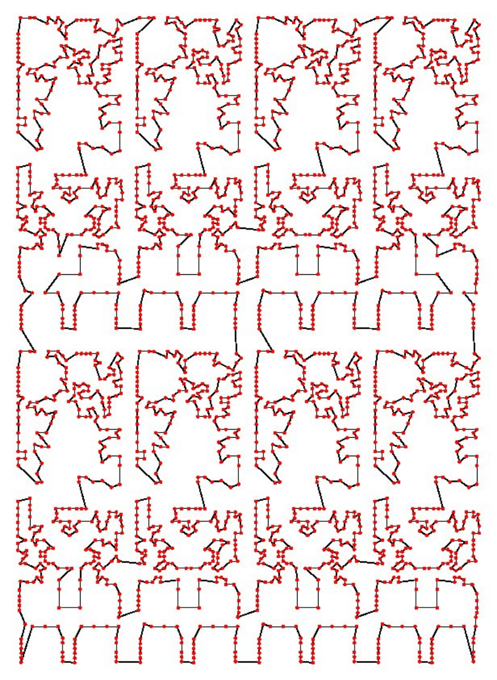
- Tout tour peut se représenter comme une affectation
- Toute affectation ne représente pas un tour

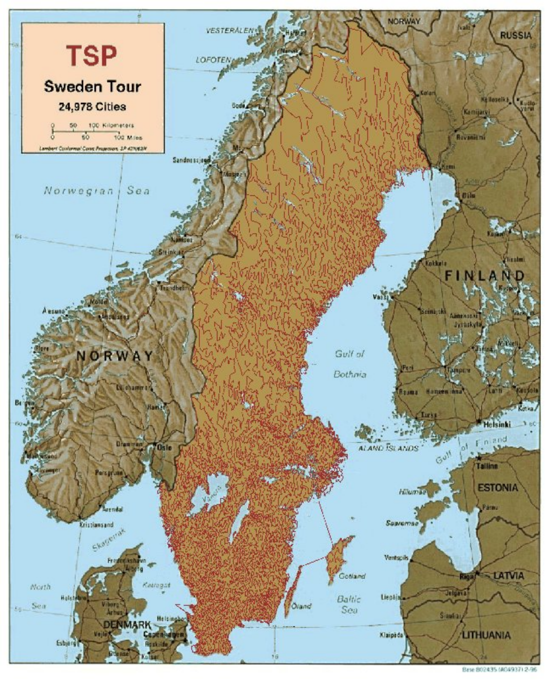
La contrainte supplémentaire élimine les sous-tours

Et pourtant, le TSP est beaucoup plus compliqué

Jalons historiques dans la lutte contre le TSP

année	taille n	contexte
1962	33 villes	concours Proctor et Gamble
1987	532 villes	switch locations in USA
1987	2392 points	layout d'un chip chez Tektronix
1994	7397 villes	grandes villes aux USA
2004	24 978 villes	Les villes de Suède




TSP
Sweden Tour
24,978 Cities
Norwegian Sea
NORWAY
FINLAND
Gulf of Bothnia
ESTONIA
LATVIA
LITHUANIA
DENMARK
Baltic Sea
RUSSIA

Encore quelques mots sur la complexité

Le nombre de solutions n'est pas un problème en soi

- Nombre d'affectations $= n!$
- Nombre de tours $= (n-1)!$

alors que

- Complexité de l'affectation = algorithme polynomial en $\mathcal{O}(n^4)$
- Complexité du TSP = pas d'algorithme polynomial connu
  et on croit qu'il n'en existe pas.

Le Mystère de la complexité

Où est la différence entre

- un problème facile: affectation, et
- un problème difficile: TSP ?

C'est un problème fameux.

P=NP ?

P=NP ?

- P les problèmes pour lesquels il existe un algorithme polynomial
- NP une classe plus large qui contient
  - P
  - beaucoup d'autres problèmes: TSP, coloration de graphes, satisfaisabilité, sac de campeur, ...
    Pour ces derniers, on ne connaît pas d'algorithme polynomial.

Mais, si on trouve un algorithme polynomial pour le TSP, alors P=NP et tous ces problèmes *difficiles* sont *polynomiaux*.

P=NP ?

- P les problèmes pour lesquels il existe un algorithme polynomial
- NP une classe plus large qui contient
  - P
  - beaucoup d'autres problèmes: TSP, coloration de graphes, satisfaisabilité, sac de campeur, ...
    Pour ces derniers, on ne connaît pas d'algorithme polynomial.

  Mais, si on trouve un algorithme polynomial pour le TSP, alors P=NP et tous ces problèmes *difficiles* sont *polynomiaux*.

Personne ne croit que $P = NP$,
mais personne n'est parvenu à démontrer que P$\neq$NP.

P=NP ?

Et les autres conjectures ?

P=NP, un problème théorique

- très important
- très rémunérateur: 1 000 000 $ offerts par la Fondation Clay

L'année passée, la conjecture de Poincaré

- prouvée par Grigori Perelman
- mais, il a refusé la (modeste) prime,
  ainsi que la médaille Fields (Nobel des "jeunes" mathématiciens)

Les prix des mathématiciens

- Pas de Nobel en math, pour des raisons liées à la petite histoire d'Alfred Nobel
- Deux prix aussi prestigieux !
  - La médaille Fields, pour les moins de 40 ans
  - Le prix Abel, sans limite d'âge

Les mathématiques sont vraiment enrichissantes !

Qui veut gagner des millions?

Les prix des mathématiciens

- Pas de Nobel en math, pour des raisons liées à la petite histoire d'Alfred Nobel
- Deux prix aussi prestigieux !
  - La médaille Fields, pour les moins de 40 ans
  - Le prix Abel, sans limite d'âge

    Ce prix vient d'être décerné au mathématicien d'origine belge: Jacques Tits

Nous avons perdu . . .

Nous avons perdu . . . mais nous gagnons. . .