Mathématiques
Quand la théorie des jeux mène aux prix Nobel

Thomas BRIHAYE

Service de Mathématiques Effectives
Département de Mathématique
UMONS

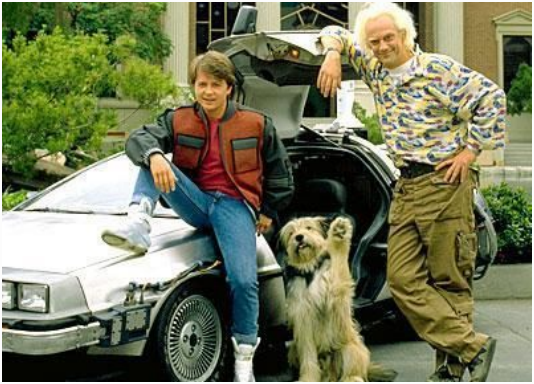
Proclamation de la 38e Olympiade Mathématique Belge
Samedi 18 mai 2013

Plan de l'exposé

1. Zermelo et le jeu de Nim
   - Jeu de Nim
   - Théorème de Zermelo et applications
2. Selten, Kuhn et la bataille des imprimantes
   - La bataille des imprimantes
   - Théorème de Kuhn et applications
3. Nash et le tir au but
   - Tir au but (ou penalty)
   - Théorème de Nash et applications
4. Harsanyi et le problème de Monty Hall
   - Le problème de Monty Hall
   - Jeux à information imparfaite
5. Pour conclure

Plan de l'exposé

Les héros de la première partie: Marty et Doc!



Doc et Marty s'ennuient...

Doc: "J'ai une idée! Jouons au jeu de Nim!"

Le jeu de Nim

Les règles du jeu

- Il s'agit d'un jeu à deux joueurs.
- Les joueurs jouent à tour de rôle.
- Une pile de n pièces est posée sur une table.
- A chaque étape, le joueur qui a la main retire 1 ou 2 pièces.
- Le joueur qui retire la dernière pièce **perd** la partie.

Modélisation d’une partie

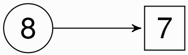
Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Marty ; joueur 2: Doc.

8

Modélisation d’une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Marty ; joueur 2: $\boxed{\text{Doc}}$.

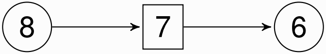
- Marty retire **1** pièce.



Modélisation d'une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Marty ; joueur 2: Doc.

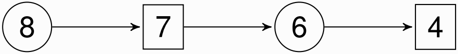
- Marty retire **1** pièce.
- Doc retire **1** pièce.



Modélisation d’une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Marty ; joueur 2: Doc.

- Marty retire **1** pièce.
- Doc retire **1** pièce.
- Marty retire **2** pièces.



Modélisation d'une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Marty ; joueur 2: $\boxed{\text{Doc}}$.

- Marty retire **1** pièce.
- $\boxed{\text{Doc}}$ retire **1** pièce.
- Marty retire **2** pièces.
- $\boxed{\text{Doc}}$ retire **2** pièces.

$$8 \longrightarrow \boxed{7} \longrightarrow 6 \longrightarrow \boxed{4} \longrightarrow 2$$

Modélisation d'une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Marty ; joueur 2: Doc.

- Marty retire **1** pièce.
- Doc retire **1** pièce.
- Marty retire **2** pièces.
- Doc retire **2** pièces.
- Marty retire **1** pièce.

$$8 \longrightarrow \boxed{7} \longrightarrow 6 \longrightarrow \boxed{4} \longrightarrow 2 \longrightarrow \boxed{1}$$

Modélisation d’une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Marty ; joueur 2: Doc.

- Marty retire **1** pièce.
- Doc retire **1** pièce.
- Marty retire **2** pièces.
- Doc retire **2** pièces.
- Marty retire **1** pièce.
- Doc retire **1** pièce.

$$8 \longrightarrow \boxed{7} \longrightarrow 6 \longrightarrow \boxed{4} \longrightarrow 2 \longrightarrow \boxed{1} \longrightarrow 0$$

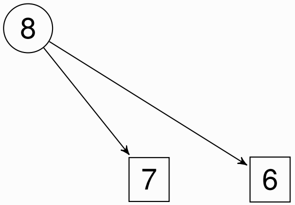
Marty remporte la partie!

Doc a perdu!

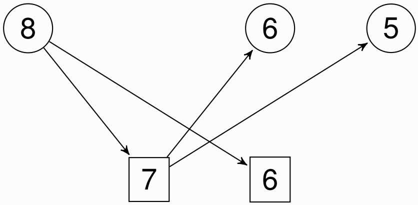
Doc: “Nom de Zeus!”

Un modèle pour le jeu de Nim

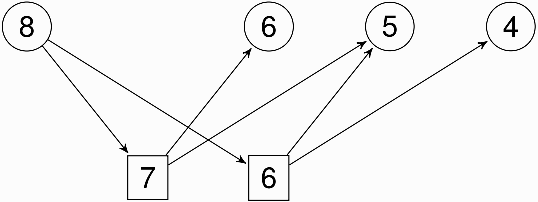
Un modèle pour le jeu de Nim



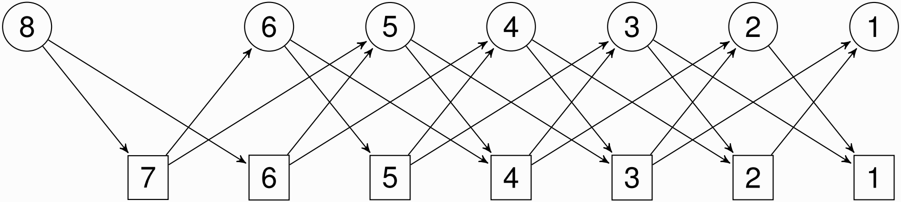
Un modèle pour le jeu de Nim



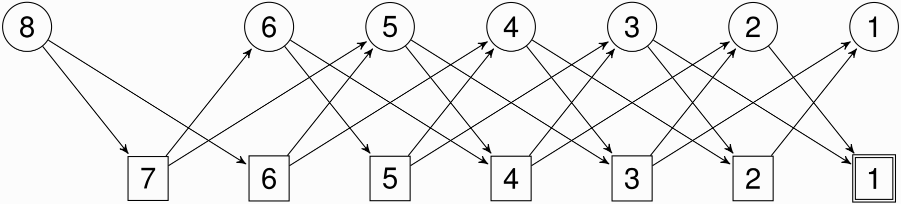
Un modèle pour le jeu de Nim



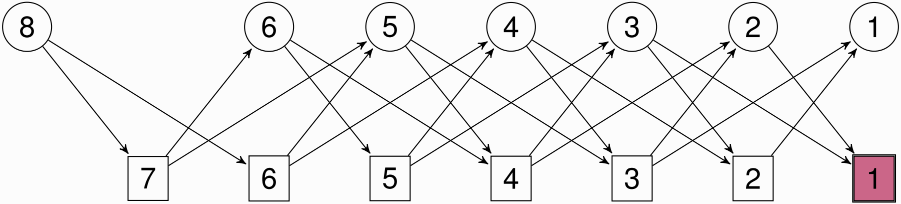
Un modèle pour le jeu de Nim



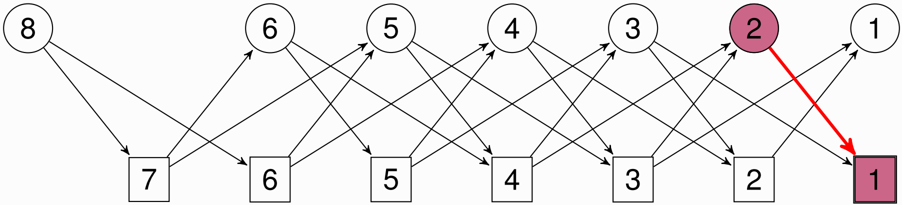
Un modèle pour le jeu de Nim



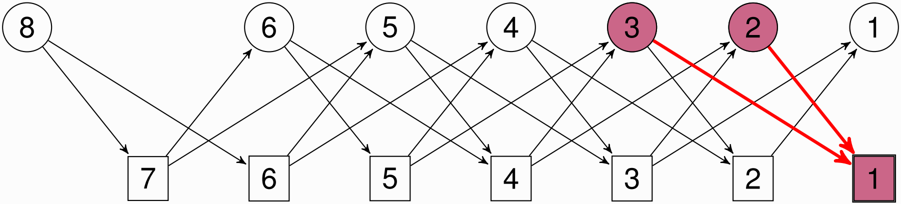
Pourquoi Marty a battu Doc ?



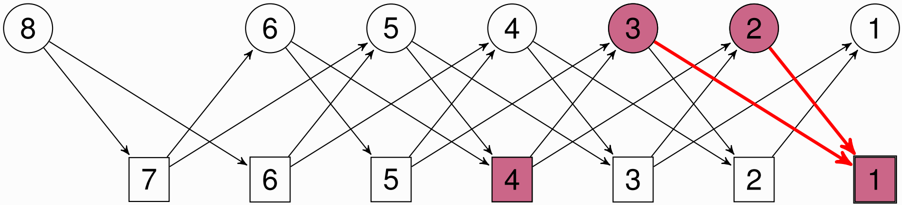
Pourquoi Marty a battu Doc ?



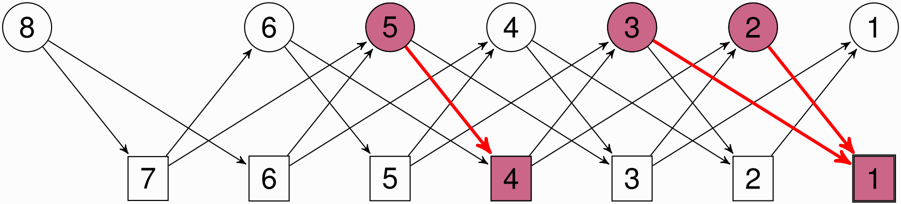
Pourquoi Marty a battu Doc ?



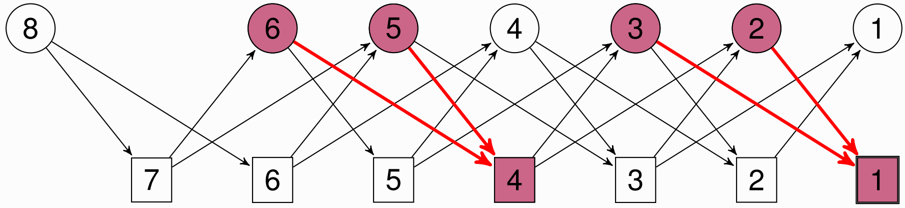
Pourquoi Marty a battu Doc ?



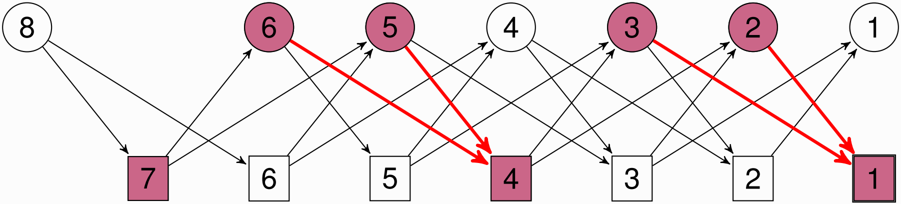
Pourquoi Marty a battu Doc ?



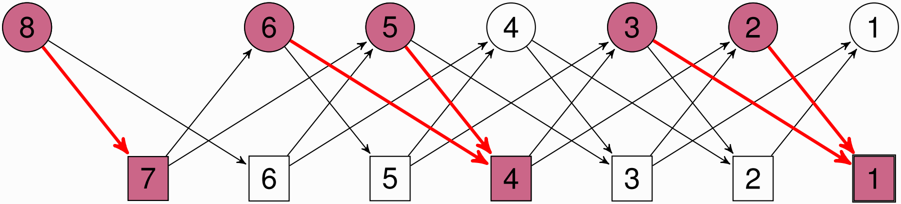
Pourquoi Marty a battu Doc ?



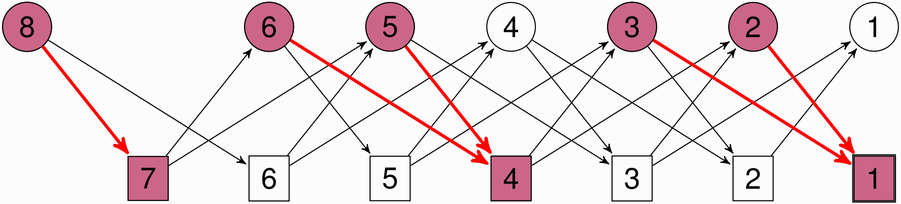
Pourquoi Marty a battu Doc ?



Pourquoi Marty a battu Doc ?



Pourquoi Marty a battu Doc ?



Marty: “Doc, quoi que tu fasses, je gagnerai!”

Doc: “Nom de Zeus!”

Marty: “Alors Doc,
avez-vous compris
pourquoi j’étais
invincible à ce jeu?”

Doc: “Bien entendu!!!
Tout repose sur
*la notion de **modulo**.*
Etudions cela à la loupe!”

Un peu d'arithmétique. . .

Division Euclidienne

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}_0$, il existe deux uniques naturels q, $r \in \mathbb{N}$ tels que:

$$a = d \cdot q + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < d.$$

- On appelle a le dividende, d le diviseur, q le quotient et r le reste.
- Le reste r (de la division de a par d) est noté $a \bmod d$.

Un peu d'arithmétique…

Division Euclidienne

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}_0$, il existe deux uniques naturels $q, r \in \mathbb{N}$ tels que:

$$a = d \cdot q + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < d.$$

- On appelle a le dividende, d le diviseur, q le quotient et r le reste.
- Le reste r (de la division de a par d) est noté $a \bmod d$.

$$\begin{array}{r|l}
857 & \;7 \\ \cline{2-2}
-7 & 122 \\
15 & \\
-14 & \\
17 & \\
-14 & \\
3 &
\end{array}$$

Quand on divise 857 par 7:

$$857 = 7 \cdot 122 + 3$$

$$857 \bmod 7 = 3$$

Résultats

Théorème

Dans le jeu de Nim avec n pièces,

- Le premier joueur a une **stratégie gagnante** ssi $n \bmod 3 \neq 1$.
- La **stratégie gagnante** consiste à

$$\text{laisser } k \text{ pièces tel que } k \bmod 3 = 1.$$

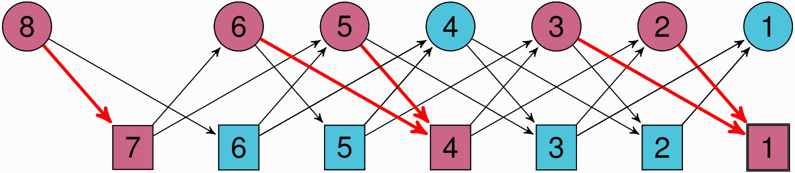
Résultats

Théorème

Dans le jeu de Nim avec n pièces,

- Le premier joueur a une **stratégie gagnante** ssi $n \bmod 3 \neq 1$.
- La **stratégie gagnante** consiste à

  laisser k pièces tel que $k \bmod 3 = 1$.



- $8 \bmod 3 = 2 \neq 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ le premier joueur a une stratégie gagnante.
- $7 \bmod 3 = 4 \bmod 3 = 1 \bmod 3 = 1$.

Résultats (suite)

Théorème

Dans le jeu de Nim avec n pièces,

- Le second joueur a une **stratégie gagnante** ssi $n \bmod 3 = 1$.
- La **stratégie gagnante** consiste à

  laisser k pièces tel que $k \bmod 3 = 1$.

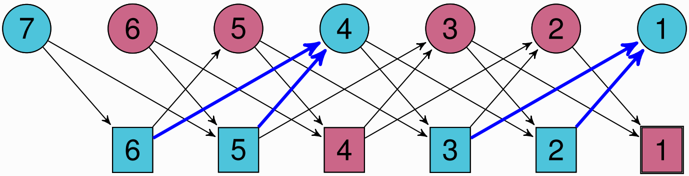
Résultats (suite)

Théorème

Dans le jeu de Nim avec n pièces,

- Le second joueur a une **stratégie gagnante** ssi $n \bmod 3 = 1$.
- La **stratégie gagnante** consiste à

  laisser k pièces tel que $k \bmod 3 = 1$.



- $7 \bmod 3 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ le second joueur a une stratégie gagnante.
- $4 \bmod 3 = 1 \bmod 3 = 1$.

Plan de l'exposé

Doc: “Il y a une théorie mathématique fabuleuse derrière tout ça!!!”

Un peu de théorie...

Jeu combinatoire

Un *jeu combinatoire* est la donnée de $(P_1, P_2, \rightarrow, F_1)$ où

- P_1 est l'ensemble (fini) des positions du joueur 1 (noté J_1),

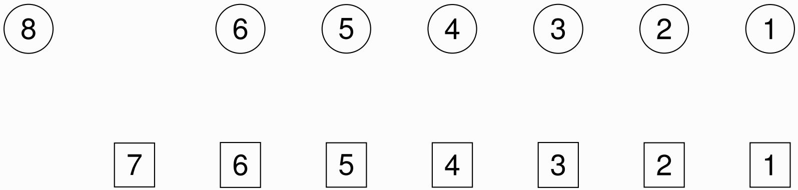
8 6 5 4 3 2 1

Un peu de théorie...

Jeu combinatoire

Un *jeu combinatoire* est la donnée de $(P_1, P_2, \rightarrow, F_1)$ où

- P_1 est l'ensemble (fini) des positions du joueur 1 (noté J_1),
- P_2 est l'ensemble (fini) des positions du joueur 2 (noté J_2),

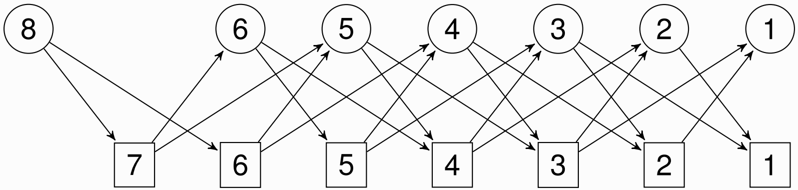


Un peu de théorie...

Jeu combinatoire

Un *jeu combinatoire* est la donnée de $(P_1, P_2, \rightarrow, F_1)$ où

- P_1 est l'ensemble (fini) des positions du joueur 1 (noté J_1),
- P_2 est l'ensemble (fini) des positions du joueur 2 (noté J_2),
- $\rightarrow \subseteq (P_1 \times P_2) \cup (P_2 \times P_1)$ est la fonction de transition du jeu,

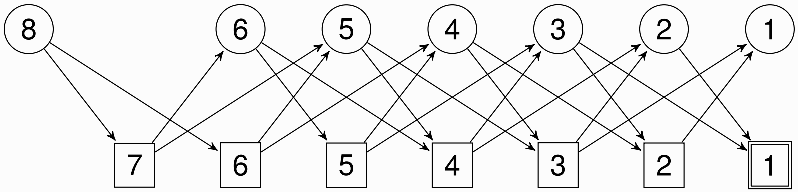


Un peu de théorie...

Jeu combinatoire

Un *jeu combinatoire* est la donnée de $(P_1, P_2, \rightarrow, F_1)$ où

- P_1 est l'ensemble (fini) des positions du joueur 1 (noté J_1),
- P_2 est l'ensemble (fini) des positions du joueur 2 (noté J_2),
- $\rightarrow \subseteq (P_1 \times P_2) \cup (P_2 \times P_1)$ est la fonction de transition du jeu,
- F_1 représente les positions finales pour le joueur 1.



Un peu de théorie...

Jeu combinatoire

Un *jeu combinatoire* est la donnée de $(P_1, P_2, \rightarrow, F_1)$ où

- P_1 est l'ensemble (fini) des positions du joueur 1 (noté J_1),
- P_2 est l'ensemble (fini) des positions du joueur 2 (noté J_2),
- $\rightarrow \subseteq (P_1 \times P_2) \cup (P_2 \times P_1)$ est la fonction de transition du jeu,
- F_1 représente les positions finales pour le joueur 1.

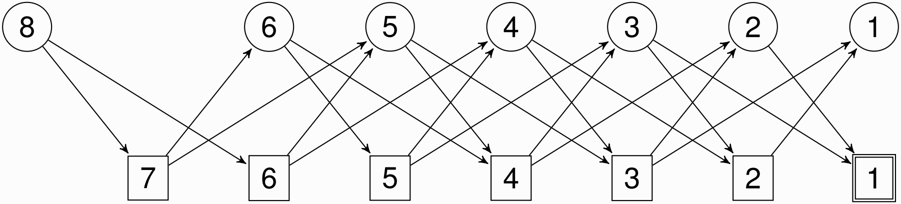
But du jeu

- Le joueur 1 gagne si F_1 est visité au cours de la partie.
- Le joueur 2 gagne si F_1 n'est jamais visité au cours de la partie.

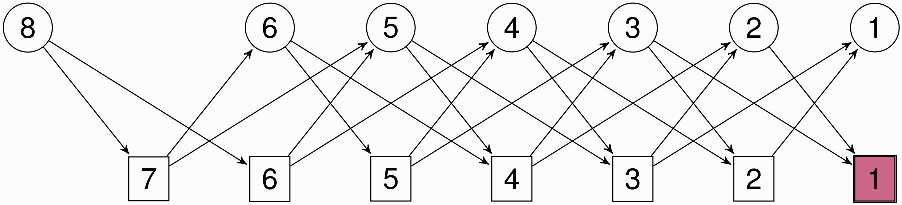
Marty: “Doc, comment faire pour tenter de gagner un tel jeu?”

*Doc: “Il faut aller dans le **futur**, et raisonner **à l’envers**...*
*... c’est la **backward induction**!”*

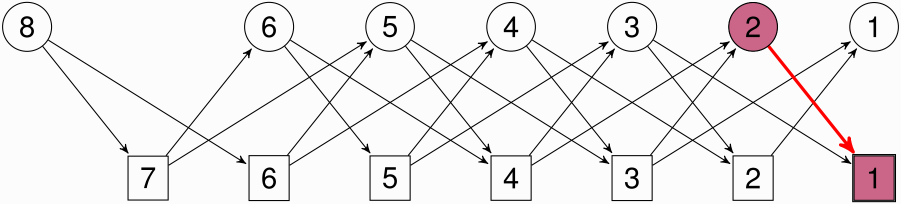
Comment gagner une partie ?



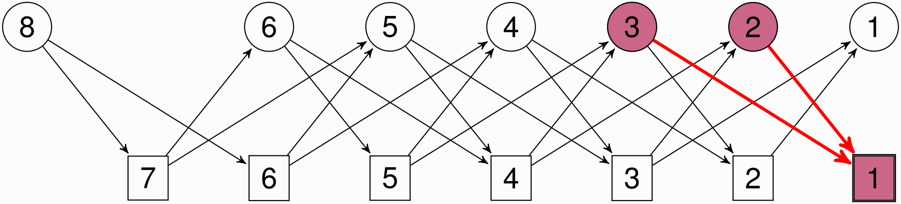
Comment gagner une partie ?



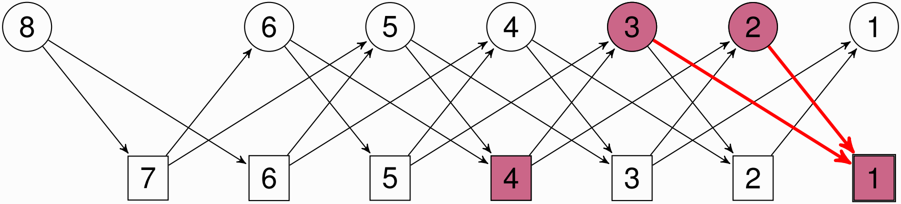
Comment gagner une partie ?



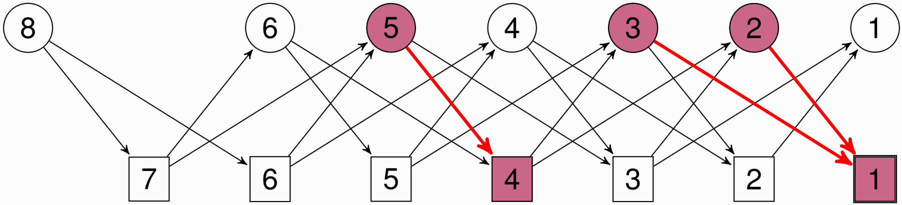
Comment gagner une partie ?



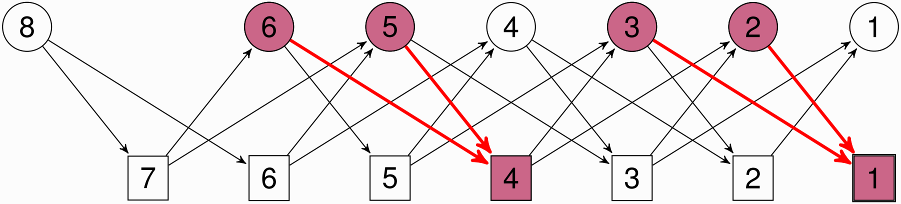
Comment gagner une partie ?



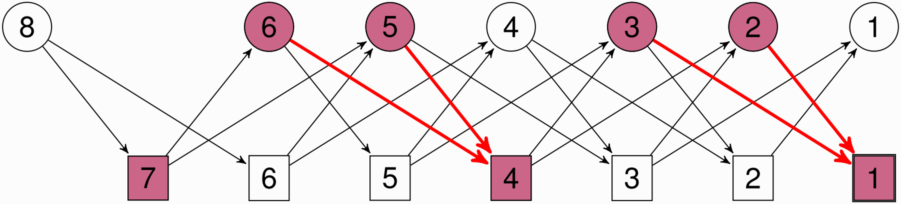
Comment gagner une partie ?



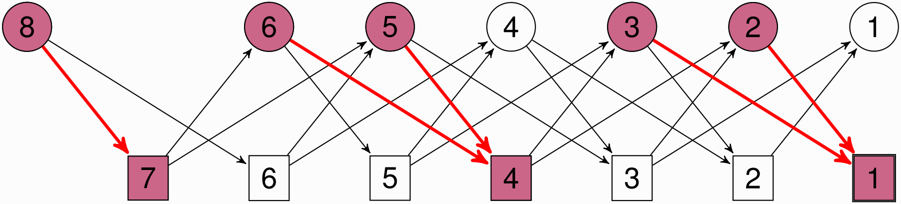
Comment gagner une partie ?



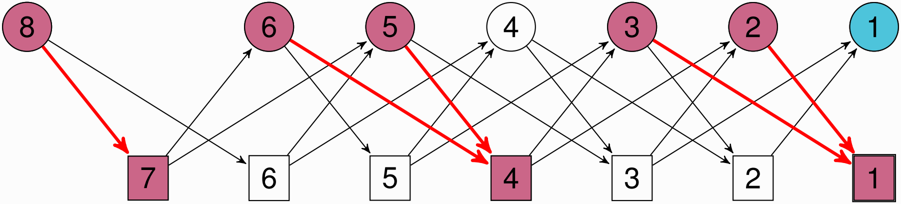
Comment gagner une partie ?



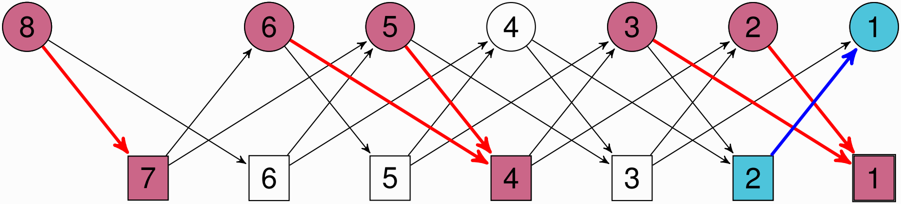
Comment gagner une partie ?



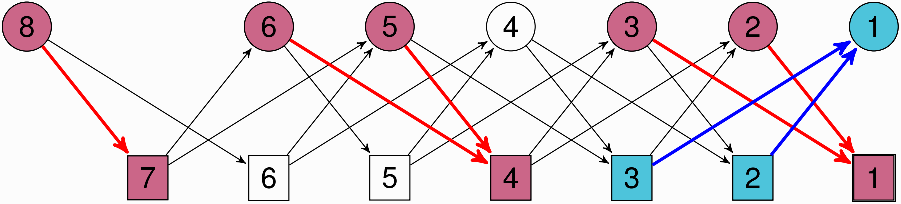
Comment gagner une partie ?



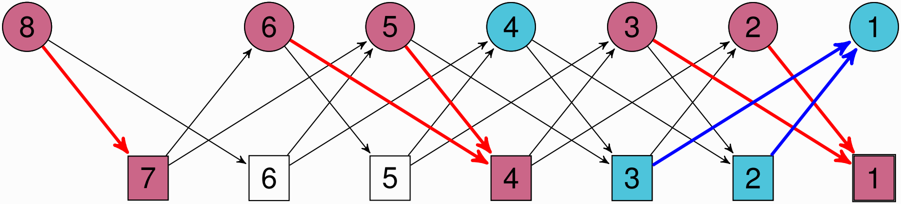
Comment gagner une partie ?



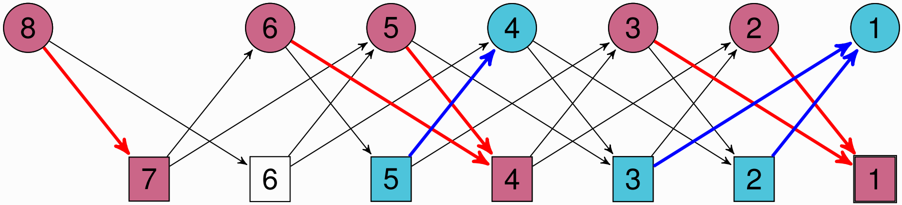
Comment gagner une partie ?



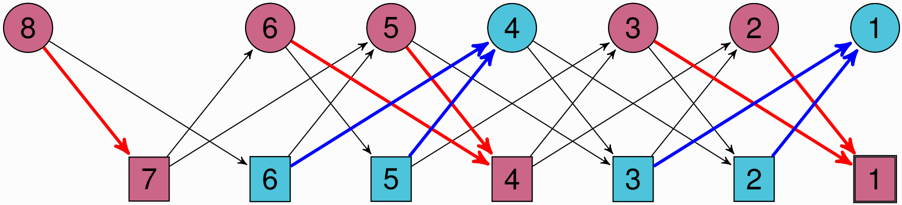
Comment gagner une partie ?



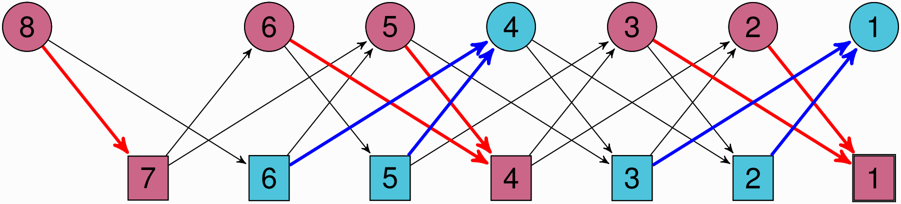
Comment gagner une partie ?



Comment gagner une partie ?



Comment gagner une partie ?



Un peu de vocabulaire:

- Les flèches rouges représentent une stratégie gagnante de J_1.
- Les flèches bleues représentent une stratégie gagnante de J_2.
- Cette technique s'appelle la **backward induction**.

Remarques sur les jeux combinatoires

Un **jeu combinatoire** est un jeu

- à deux joueurs (pas le foot, ni le rugby),
- où les joueurs jouent à tour de rôle (pas *“Pierre-Papier-Ciseaux”*),
- fini (pas le tennis),
- à information parfaite (pas le poker, ni la bataille navale),
- sans intervention du hasard (pas le monopoly, ni le jeu de l’oie).

Remarques sur les jeux combinatoires

Un **jeu combinatoire** est un jeu

- à deux joueurs (pas le foot, ni le rugby),
- où les joueurs jouent à tour de rôle (pas *“Pierre-Papier-Ciseaux”*),
- fini (pas le tennis),
- à information parfaite (pas le poker, ni la bataille navale),
- sans intervention du hasard (pas le monopoly, ni le jeu de l’oie).

Exemples

Puissance 4, Dames, Echecs,...

Théorème de Zermelo (1913)

Dans un jeu combinatoire fini, avant le début du jeu, on sait déjà que:

- soit exactement un des deux joueurs possède une stratégie gagnante (non perdante),
- soit les deux joueurs peuvent forcer un match nul.

Théorème de Zermelo (1913)

Dans un jeu combinatoire fini, avant le début du jeu, on sait déjà que:

- soit exactement un des deux joueurs possède une stratégie gagnante (non perdante),
- soit les deux joueurs peuvent forcer un match nul.

Preuve: Pour obtenir les états gagnants (et les stratégies gagnantes):

- On construit un modèle du jeu (le modèle est fini car le jeu est fini).
- On applique la **backward induction**.

$\square$

Théorème de Zermelo (1913)

Dans un jeu combinatoire fini, avant le début du jeu, on sait déjà que:

- soit exactement un des deux joueurs possède une stratégie gagnante (non perdante),
- soit les deux joueurs peuvent forcer un match nul.

Preuve: Pour obtenir les états gagnants (et les stratégies gagnantes):

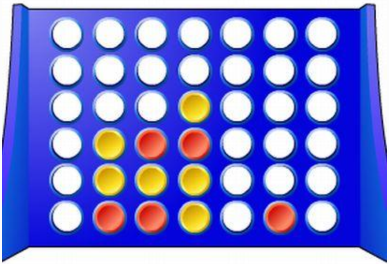
- On construit un modèle du jeu (le modèle est fini car le jeu est fini).
- On applique la **backward induction**.

□

Et en pratique ?

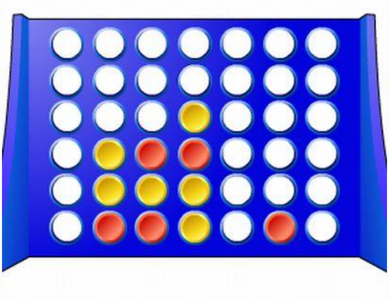
La taille du modèle peut être **gigantesque** et la stratégie gagnante incroyablement complexe (même pour un ordinateur)!!!

Puissance 4 (commercialisé depuis 1974)



Un modèle du jeu de Puissance 4 contient plus de **4.10^{12}** états.

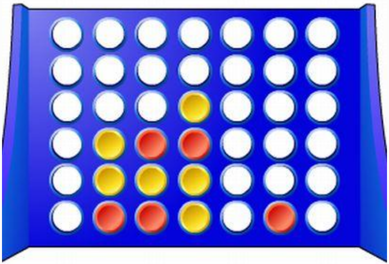
Puissance 4 (commercialisé depuis 1974)



Un modèle du jeu de Puissance 4 contient plus de $\mathbf{4.10^{12}}$ états.

Le nombre d'étoiles dans notre galaxie est de l'ordre de $\mathbf{3.10^{11}}$.

Puissance 4 (commercialisé depuis 1974)



Un modèle du jeu de Puissance 4 contient plus de $\mathbf{4.10^{12}}$ états.

Le nombre d'étoiles dans notre galaxie est de l'ordre de $\mathbf{3.10^{11}}$.

Résolution du Puissance 4

Une description complète d'une stratégie **gagnante** pour le joueur qui commence à jouer n'a été proposée qu'en **1988**.

Les échecs

Un modèle du jeu pour les échecs contient plus de $\mathbf{10^{43}}$ états.

Les échecs

Un modèle du jeu pour les échecs contient plus de $\mathbf{10^{43}}$ **états.**

Le **Sequoia** (IBM 2012) d'une puissance de 16,324 PFlops

$$16,324 \text{ PFlops } = 16,324 \cdot 10^{15} = 16\,324\,000\,000\,000\,000 \text{ op/sec}$$

a besoin de $\mathbf{10^{26}}$ sec. pour effectuer *naïvement* la backward induction.

Les échecs

Un modèle du jeu pour les échecs contient plus de $\mathbf{10^{43}}$ états.

Le **Sequoia** (IBM 2012) d'une puissance de 16,324 PFlops

$$16{,}324 \text{ PFlops} = 16{,}324 \cdot 10^{15} = 16\,324\,000\,000\,000\,000 \text{ op/sec}$$

a besoin de $\mathbf{10^{26}}$ sec. pour effectuer *naïvement* la backward induction.

Depuis le big bang, il s'est écoulé moins de $\mathbf{10^{17}}$ secondes...

C’est rigolo...

... mais ça sert à quoi ???

Application: pilote automatique d'un avion

- Le joueur 1 modélise le pilote automatique.
- Le joueur 2 modélise les conditions météorologiques.
- F_1 modélise la ville que l'avion souhaite atteindre (ex: New York).

Application: pilote automatique d'un avion

- Le joueur 1 modélise le pilote automatique.
- Le joueur 2 modélise les conditions météorologiques.
- F_1 modélise la ville que l'avion souhaite atteindre (ex: New York).

J_1 possède une stratégie gagnante face à J_2 pour atteindre F_1 signifie

Le pilote automatique peut amener l'avion à New York,
quelles que soient les conditions météorologiques.

Plan de l’exposé

La bataille des imprimantes

Au bureau, **3 personnes** veulent imprimer leur propre document.

Gaston
Garçon de bureau

Jeanne
Secrétaire

Fantasio
Editeur en chef

La bataille des imprimantes

Au bureau, **3 personnes** veulent imprimer leur propre document.

Gaston
Garçon de bureau

Jeanne
Secrétaire

Fantasio
Editeur en chef

2 imprimantes: l'imprimante I_1 et l'imprimante I_2, avec les caractéristiques suivantes:

La bataille des imprimantes

Au bureau, **3 personnes** veulent imprimer leur propre document.

Gaston
Garçon de bureau

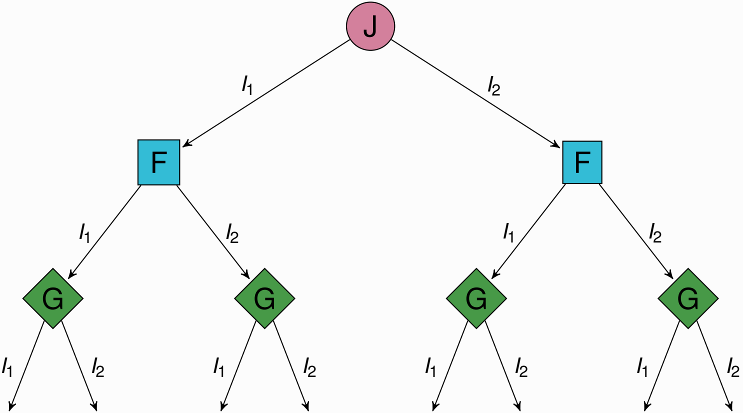
Jeanne
Secrétaire

Fantasio
Editeur en chef

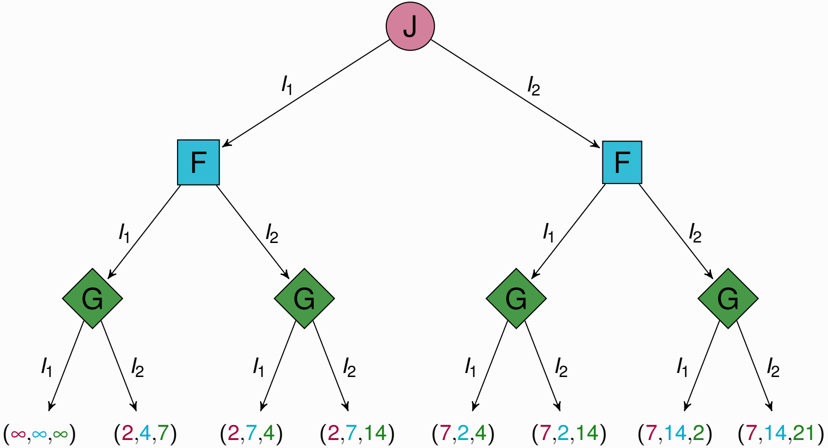
2 imprimantes: l'imprimante I_1 et l'imprimante I_2, avec les caractéristiques suivantes:

- I_1: 2 secondes/document,
  mais bourrage papier si 3 documents sont envoyés.
- I_2: 7 secondes/document.

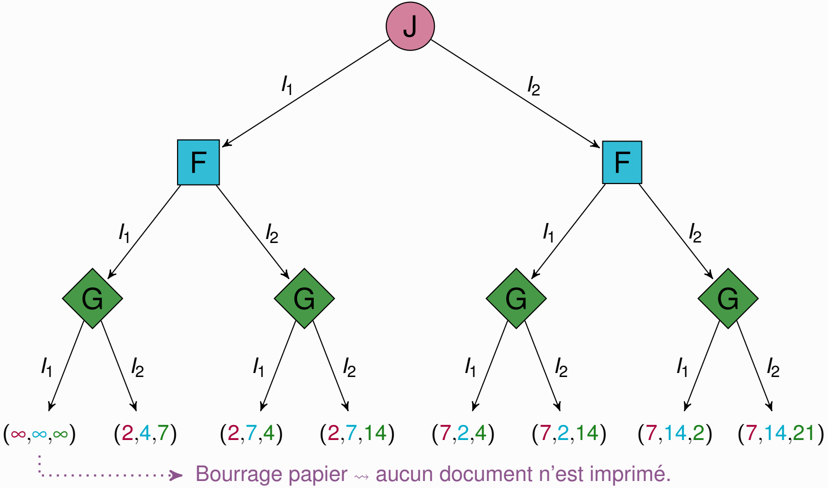
Un modèle pour la bataille des imprimantes



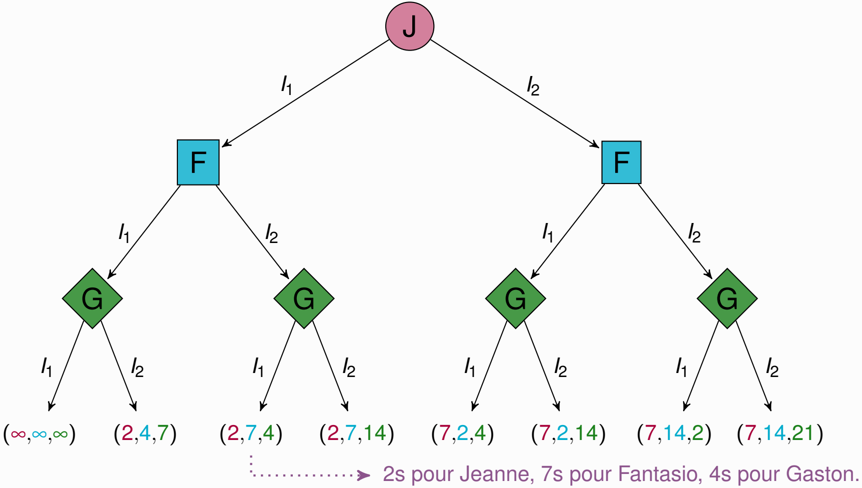
Un modèle pour la bataille des imprimantes



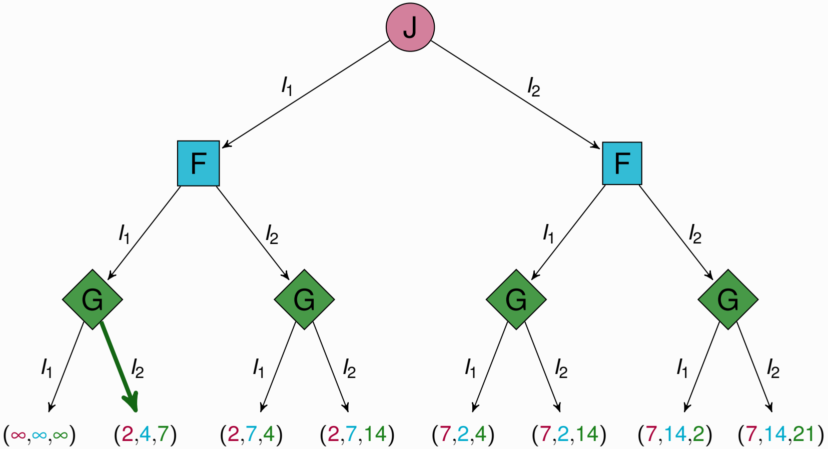
Un modèle pour la bataille des imprimantes



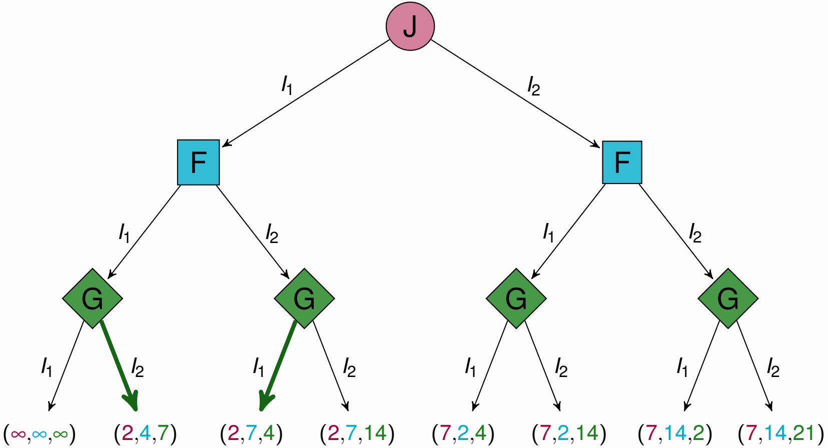
Backward induction **again** !!!



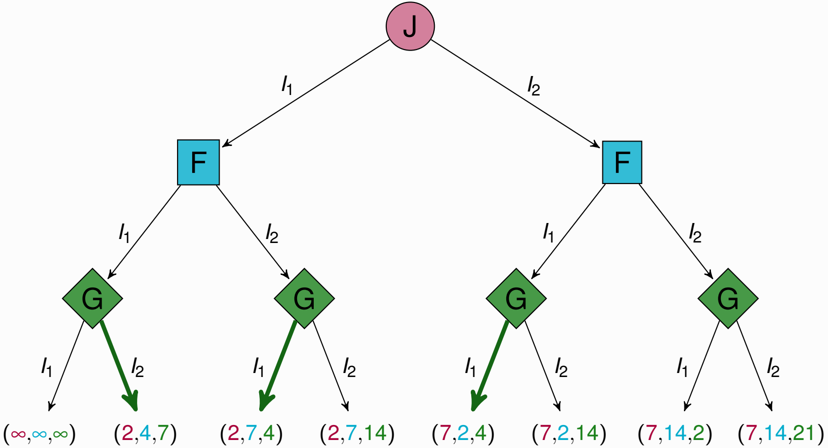
Backward induction **again** !!!



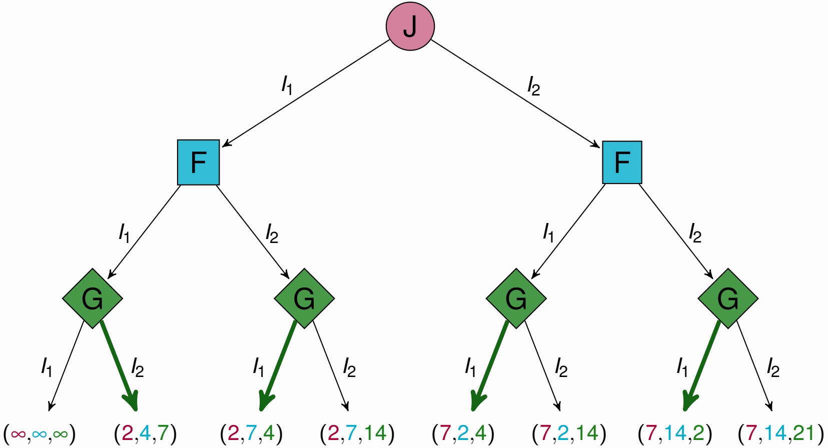
Backward induction **again** !!!



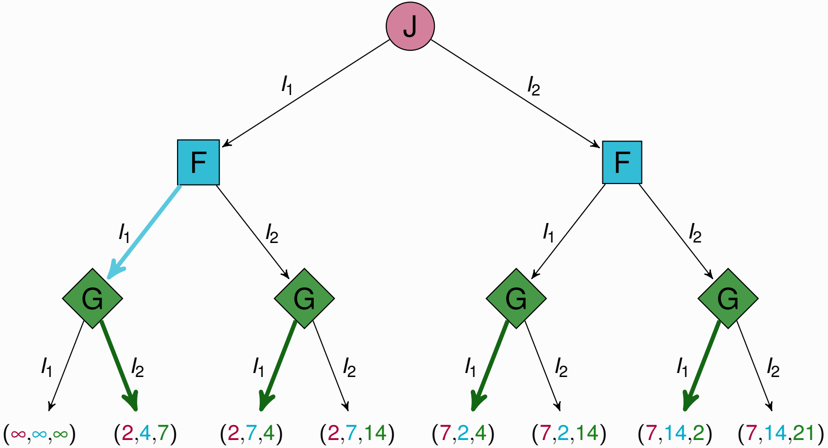
Backward induction **again** !!!



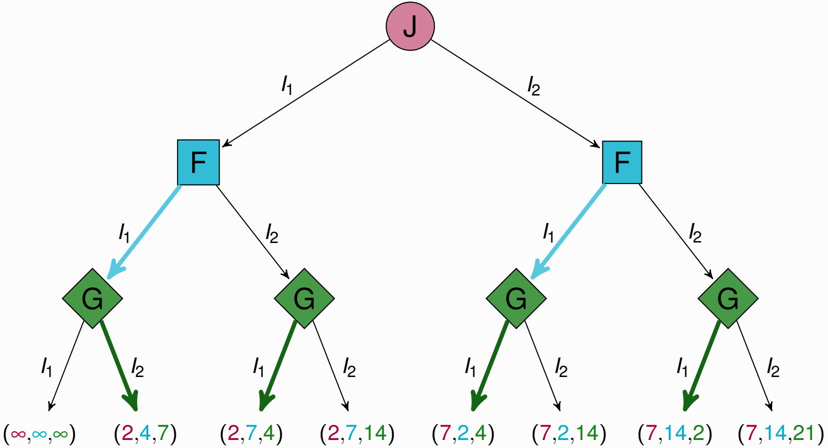
Backward induction **again** !!!



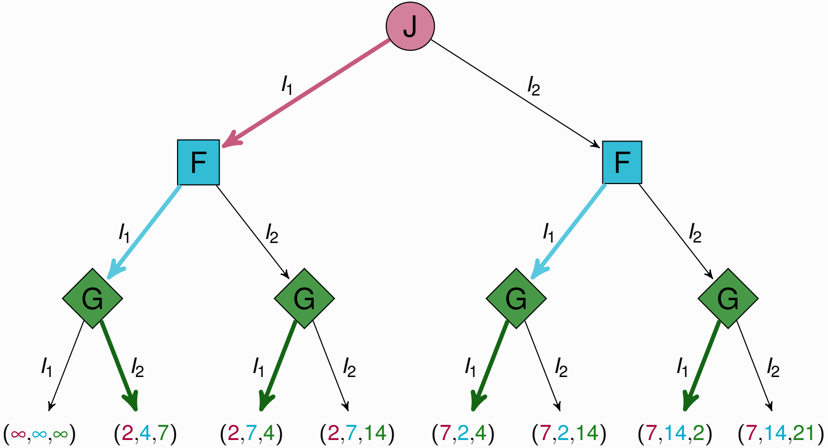
Backward induction **again** !!!



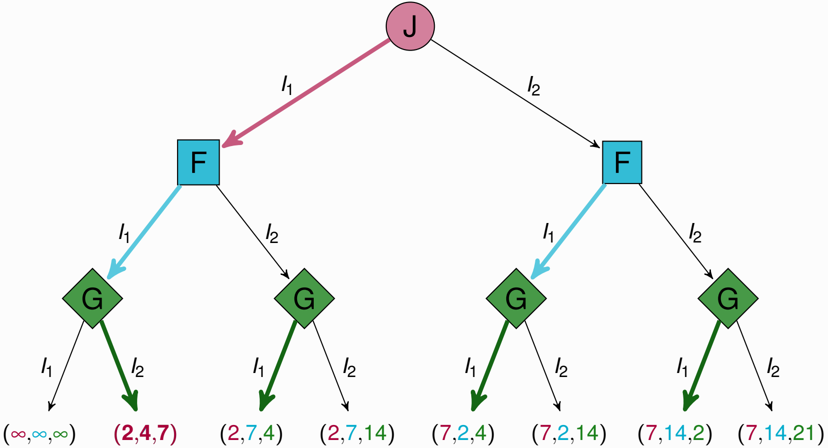
Backward induction **again** !!!



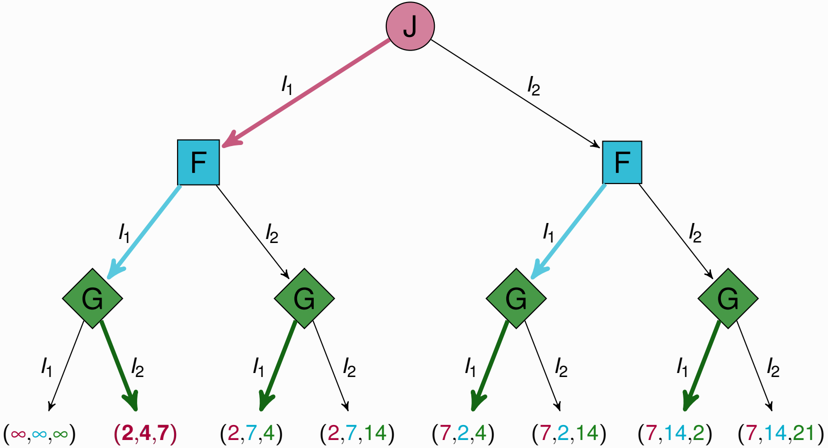
Backward induction **again** !!!



Backward induction **again** !!!



Backward induction **again** !!!



Une telle situation est appelée un **équilibre parfait en sous-jeux.**

Plan de l’exposé

Théorème de Kuhn

Théorème [Kuhn 1953]

Tout jeu quantitatif sur un arbre fini admet

un équilibre parfait en sous-jeux.

Preuve:

Encore une fois, on applique la **backward induction**.

CQFD

Théorème de Kuhn

Théorème [Kuhn 1953]

Tout jeu quantitatif sur un arbre fini admet

un équilibre parfait en sous-jeux.

La notion d'équilibre parfait en sous-jeux

a été introduite par R. Selten.

Application: protocoles de télécommunications

Les jeux quantitatifs sont utilisés pour modéliser

- des protocoles de gestion d'impression,
- des protocoles de télécommunications entre téléphones et/ou ordinateurs portables,...

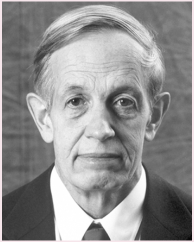
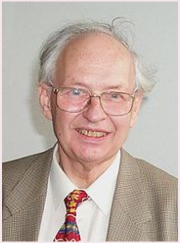
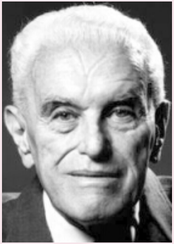
Retour sur le titre de l'exposé

Quand la théorie des jeux mène aux prix Nobel...

Retour sur le titre de l'exposé

Quand la théorie des jeux mène aux prix Nobel...

Prix Nobel d'économie 1994: J. Nash, R. Selten et J. Harsanyi

Plan de l'exposé

Le penalty

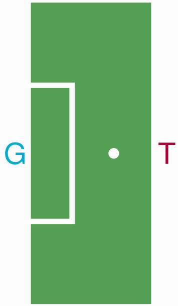
Importance du penatly

- Finale de la coupe du monde 2006: Italie 1 (5) - France 1 (3)
  Penalty français manqué de Trezeguet

- Finale de la coupe du monde 1994: Brésil 0 (3) - Italie 0 (2)
  Penalty italien manqué par Baggio

- ...

Le penalty - Les règles du jeu

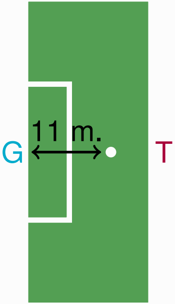


Un tireur T fait face à un gardien G.

L'objectif du T est de faire rentrer le ballon dans le but.

L'objectif du G est de l'en empêcher.

Le penalty - Les règles du jeu



Un tireur T fait face à un gardien G.

L'objectif du T est de faire rentrer le ballon dans le but.

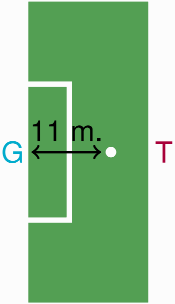
L'objectif du G est de l'en empêcher.

Le ballon est placé à 11 mètres de la ligne de but.

Dans le cas d'un tir à 150 Km/h,

le ballon atteint la ligne de but en **moins de 0.3 sec**.

Le penalty - Les règles du jeu



Un tireur T fait face à un gardien G.

L'objectif du T est de faire rentrer le ballon dans le but.

L'objectif du G est de l'en empêcher.

Le ballon est placé à 11 mètres de la ligne de but.

Dans le cas d'un tir à 150 Km/h,

le ballon atteint la ligne de but en **moins de 0.3 sec**.

Le gardien n'a donc pas le temps de réagir une fois le ballon frappé.

$\rightsquigarrow$ On supposera donc que T et G jouent **simultanément**.

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Dans un premier temps, nous supposerons:

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Dans un premier temps, nous supposerons:

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} \quad\quad & \quad\quad \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Dans un premier temps, nous supposerons:

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Si le Tireur tire à **Ga**uche et le Gardien plonge à **Dr**oite, on a (100,0).

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Dans un premier temps, nous supposerons:

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

$$\begin{array}{cc} & \text{Gardien} \\ & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Si le Tireur tire à **Ga**uche et le Gardien plonge à **Ga**uche, on a (0,100).

Personne n'a de stratégie "gagnante"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc}\textbf{Ga} & \textbf{Dr}\end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c}\textbf{Ga} \\ \textbf{Dr}\end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

On constate que le Tireur n'a pas de stratégie gagnante:

- Tirer à **Ga**uche n'est intéressant que si le Gardien plonge à **Dr**oite.
- Tirer à **Dr**oite n'est intéressant que si le Gardien plonge à **Ga**uche.

Personne n'a de stratégie "gagnante"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

On constate que le Gardien n'a pas de stratégie gagnante:

- Plonger à **Ga**uche n'est intéressant que si le Tireur tire à **Ga**uche.
- Plonger à **Dr**oite n'est intéressant que si le Tireur tire à **Dr**oite.

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{cc} & \text{Gardien} \\ & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} \quad \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0, 100) & (100, 0) \\ (100, 0) & (0, 100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 1: Toujours tirer à **G**auche,

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Gardien} \\
 & \begin{array}{cc} \quad\textbf{Ga} & \qquad\textbf{Dr} \end{array} \\
\text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Idée 1: Toujours tirer à **G**auche,

les Gardiens vont vite comprendre ma stratégie...

... ils plongeront toujours à **Ga**uche et je ne marquerai plus jamais!

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 1: Toujours tirer à **G**auche,

les Gardiens vont vite comprendre ma stratégie...

... ils plongeront toujours à **Ga**uche et je ne marquerai plus jamais!

Toujours tirer à **Dr**oite ne semble pas être une meilleure idée.

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0, 100) & (100, 0) \\ (100, 0) & (0, 100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 2: Alterner **Ga**uche, **Dr**oite, **Ga**uche, **Dr**oite,**...**

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 2: Alterner **Ga**uche, **Dr**oite, **Ga**uche, **Dr**oite,...

les Gardiens vont (un peu moins) vite comprendre ma stratégie...

... ils s'adapteront à mes tirs et je ne marquerai plus jamais!

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0, 100) & (100, 0) \\ (100, 0) & (0, 100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 2: Alterner **Ga**uche, **Dr**oite, **Ga**uche, **Dr**oite,...

les Gardiens vont (un peu moins) vite comprendre ma stratégie...

... ils s'adapteront à mes tirs et je ne marquerai plus jamais!

Il faudrait arriver à jouer de manière **imprévisible** !!!

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

Gardien

$$\text{Tireur} \quad \begin{array}{c} \\ \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\textbf{Ga} & \qquad\quad \textbf{Dr} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0, 100) & (100, 0) \\ (100, 0) & (0, 100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Avant de tirer, je lance une pièce en l'air:

si j'obtiens Pile, je tire à **Ga**uche,

si j'obtiens Face, je tire à **Dr**oite.

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Gardien} \\
 & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\
\text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Avant de tirer, je lance une pièce en l'air:

si j'obtiens Pile, je tire à **Ga**uche,

si j'obtiens Face, je tire à **Dr**oite.

Cette stratégie est totalement **imprévisible**.

Retour au penalty

On peut montrer que la stratégie optimale du Tireur est:

Avant de tirer, je lance une pièce en l'air:
si j'obtiens Pile, je tire à **Ga**uche,
si j'obtiens Face, je tire à **Dr**oite**.**

On peut montrer que la stratégie optimale du Gardien est:

Avant de plonger, je lance une pièce en l'air:
si j'obtiens Pile, je plonge à **Ga**uche,
si j'obtiens Face, je plonge à **Dr**oite**.**

L'**équilibre (de Nash)** du jeu est obtenu quand les deux joueurs font leurs choix **au hasard**, en jouant à *pile ou face* !!!

Le penalty - Une seconde version un peu plus réaliste

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

Le penalty - Une seconde version un peu plus réaliste

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

Le penalty - Une seconde version un peu plus réaliste

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

$$\begin{array}{cc} & \text{Gardien} \\ & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} \quad \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (63,37) & (94,6) \\ (89,11) & (43,57) \end{pmatrix} \end{array}$$

L'unique équilibre de Nash de ce jeu est

$$\mathbb{P}_T(\mathbf{Ga}) = \frac{46}{87} \ ; \ \mathbb{P}_T(\mathbf{Dr}) = \frac{41}{87} \ ; \ \mathbb{P}_G(\mathbf{Ga}) = \frac{51}{87} \ ; \ \mathbb{P}_G(\mathbf{Dr}) = \frac{36}{87}.$$

Le penalty - Une seconde version un peu plus réaliste

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (63, 37) & (94, 6) \\ (89, 11) & (43, 57) \end{pmatrix} \end{array}$$

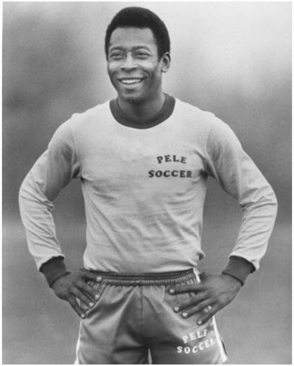
L'unique équilibre de Nash de ce jeu est

$$\mathbb{P}_T(\mathbf{Ga}) = \frac{46}{87}\ ;\ \mathbb{P}_T(\mathbf{Dr}) = \frac{41}{87}\ ;\ \mathbb{P}_G(\mathbf{Ga}) = \frac{51}{87}\ ;\ \mathbb{P}_G(\mathbf{Dr}) = \frac{36}{87}.$$

Dans la réalité, on constate que:

les *"bons tireurs de penaltys"* suivent l'équilibre de Nash !!!

Le conseil de Pelé



"Pour être un grand footballeur,

il faut être un excellent mathématicien !"

Plan de l'exposé

Equilibre de Nash

Equilibre de Nash

Un équilibre de Nash est un *profil de stratégies* où,

si un joueur dévie seul, il y perd.

Equilibre de Nash

Equilibre de Nash

Un équilibre de Nash est un *profil de stratégies* où,

si un joueur dévie seul, il y perd.

$$
\text{Joueur}_1 \quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\text{Joueur}_2} \\ \mathbf{G} & \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{H} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{B} \end{array} &
\begin{pmatrix} (1,1) & (2,2) & (\mathbf{3},\mathbf{3}) \\ (3,3) & (5,0) & (0,5) \\ (4,7) & (0,8) & (1,2) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Le profil de stratégies $(\mathbf{H}, \mathbf{D})$ est un équilibre de Nash.

Equilibre de Nash

Equilibre de Nash

Un équilibre de Nash est un *profil de stratégies* où,

si un joueur dévie seul, il y perd.

$$\text{Joueur}_1 \quad \begin{array}{c} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{B} \end{array} \begin{array}{c} \text{Joueur}_2 \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (2,2) & (\mathbf{3},\mathbf{3}) \\ (3,3) & (5,0) & (0,5) \\ (4,7) & (0,8) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le profil de stratégies (**H**, **D**) est un équilibre de Nash.

Le profil de stratégies (**B**, **G**) **n**'est **pas** un équilibre de Nash.

Retour au penalty

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0, 100) & (100, 0) \\ (100, 0) & (0, 100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Il n'y a pas d'équilibre de Nash en **stratégies pures** (sans probabilité).

Retour au penalty

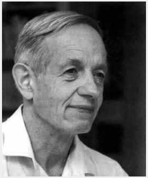
$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Il n'y a pas d'équilibre de Nash en **stratégies pures** (sans probabilité).

L'unique **équilibre (de Nash)** du jeu est obtenu quand les deux joueurs font leurs choix **au hasard**, on parle alors de **stratégies mixtes**.

Théorème de Nash

Théorème [Nash 1950]

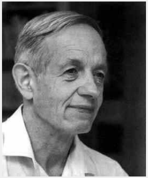


Tout jeu fini admet

un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

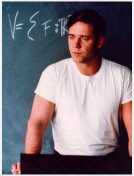
Théorème de Nash

Théorème [Nash 1950]



Tout jeu fini admet

un équilibre de Nash en stratégies mixtes.



En 2001, Russel Crowe interprète John Forbes Nash dans le film:
Un homme d'exception réalisé par Ron Howard.

Ce film remporta 4 oscars en 2002, dont celui du meilleur film.

Un mot de la preuve du Théorème de Nash

Théorème [Nash 1950]

Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Un mot de la preuve du Théorème de Nash

Théorème [Nash 1950]

Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

On peut construire une fonction $f : X \to Y$ telle que:

(σ_1, σ_2) est un équilibre de Nash ssi (σ_1, σ_2) est un point fixe de f.

Un mot de la preuve du Théorème de Nash

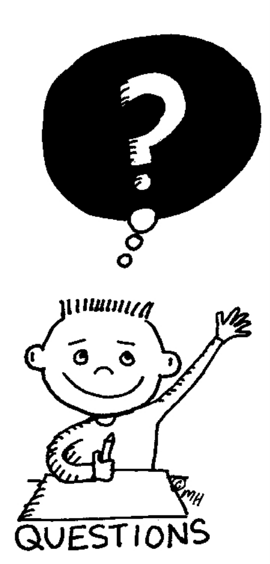
Théorème [Nash 1950]

Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

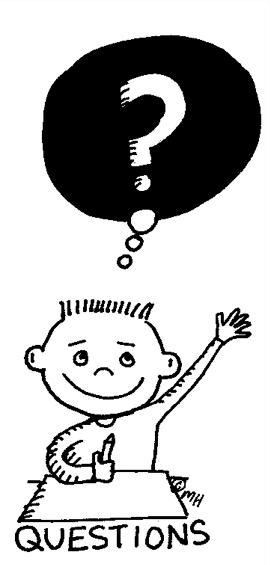
On peut construire une fonction $f : X \to Y$ telle que:

(σ_1, σ_2) est un équilibre de Nash ssi (σ_1, σ_2) est un point fixe de f.

Trouver des équilibres de Nash revient à trouver des points fixes...



C’est quoi un point fixe ?



C'est quoi un point fixe ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$,

x_0 est un point fixe de f

ssi $f(x_0) = x_0$.

Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [\text{-}1, 1] \to [\text{-}1, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [\text{-}1,1] \to [\text{-}1,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$

Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [\text{-}1, 1] \to [\text{-}1, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

f admet un point fixe	si et seulement si	g admet une racine.
$f(x_0) = x_0$	$\Leftrightarrow$	$g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0.$

Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [\text{-}1, 1] \to [\text{-}1, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

f admet un point fixe   si et seulement si g admet une racine.

$$f(x_0) = x_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0.$$

Pour tout $x \in [\text{-}1, 1]$, on a $\text{-}1 \leq f(x) \leq 1$, en particulier

- $g(1) \; = \; f(1) - (1) \; \leq \; 1 - 1 = 0$
- $g(\text{-}1) \; = \; f(\text{-}1) - (\text{-}1) \; = \; f(\text{-}1) + 1 \; \geq \; \text{-}1 + 1 = 0$

Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$

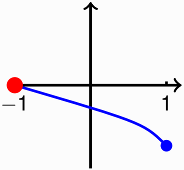
Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$



$g(\text{-}1) = 0$

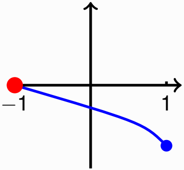
Un théorème de point fixe

Théorème

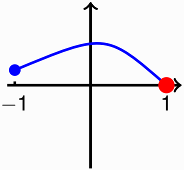
Si $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$



$g(\text{-}1) = 0$



$g(1) = 0$

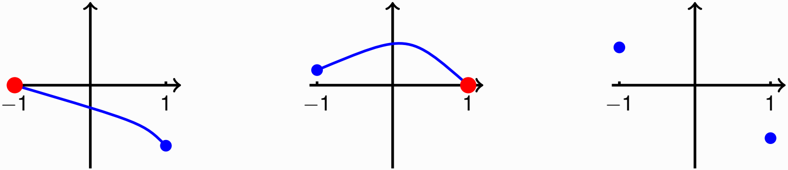
Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$



$g(\text{-}1) = 0$ $\qquad$ $g(1) = 0$ $\qquad$ $g(\text{-}1) > 0$ et $g(1) < 0$

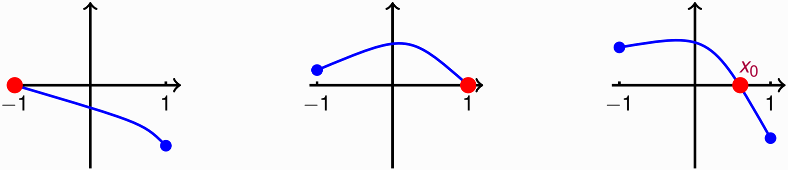
Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$



$g(\text{-}1) = 0$ $\qquad$ $g(1) = 0$ $\qquad$ $g(\text{-}1) > 0$ et $g(1) < 0$

Comme g est continue, le *Thm des valeurs intermédiaires* assure qu'il existe x_0 tq $g(x_0) = 0$.

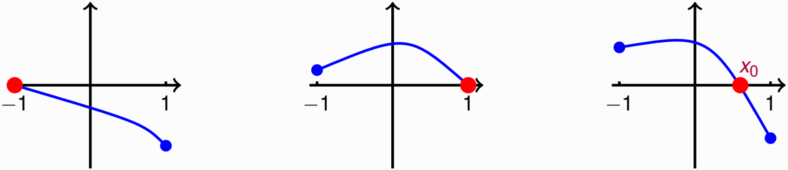
Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$



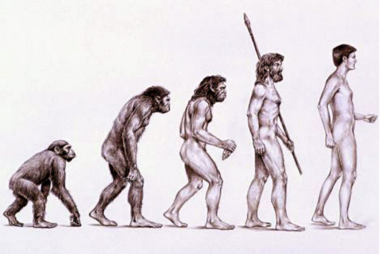
$g(\text{-}1) = 0$ | $g(1) = 0$ | $g(\text{-}1) > 0$ et $g(1) < 0$

Comme g est continue, le *Thm des valeurs intermédiaires* assure qu'il existe x_0 tq $g(x_0) = 0$.

On a donc trouvé une racine de g et donc un point fixe de f. □

Applications

Les applications de la théorie des jeux sont multiples:



- Biologie: évolution des espèces,...
- Economie: fixation du prix d’un produit,...
- Politique: résolution de conflits,...
- ...

Plan de l’exposé

Let’s make a deal

est un jeu télévisé américain (1963 à 1986) présenté par **Monty Hall**

Let’s make a deal

Le principe

Trois portes fermées,

Let’s make a deal

Le principe

Trois portes fermées,

derrière l’une d’elle se trouve une superbe voiture,

Let’s make a deal

Le principe

Trois portes fermées,

derrière l’une d’elle se trouve une superbe voiture,

derrière les deux autres se trouve une chèvre.

Let's make a deal...

Le déroulement du jeu

- Le candidat (qui ignore où est la voiture) doit choisir une porte,

Let's make a deal...

Le déroulement du jeu

- Le candidat (qui ignore où est la voiture) doit choisir une porte,
- Le présentateur (qui sait où est la voiture) ouvre une porte...

Let's make a deal...

Le déroulement du jeu

- Le candidat (qui ignore où est la voiture) doit choisir une porte,
- Le présentateur (qui sait où est la voiture) ouvre une porte...
  ...derrière laquelle se trouve toujours une chèvre...

Let’s make a deal...

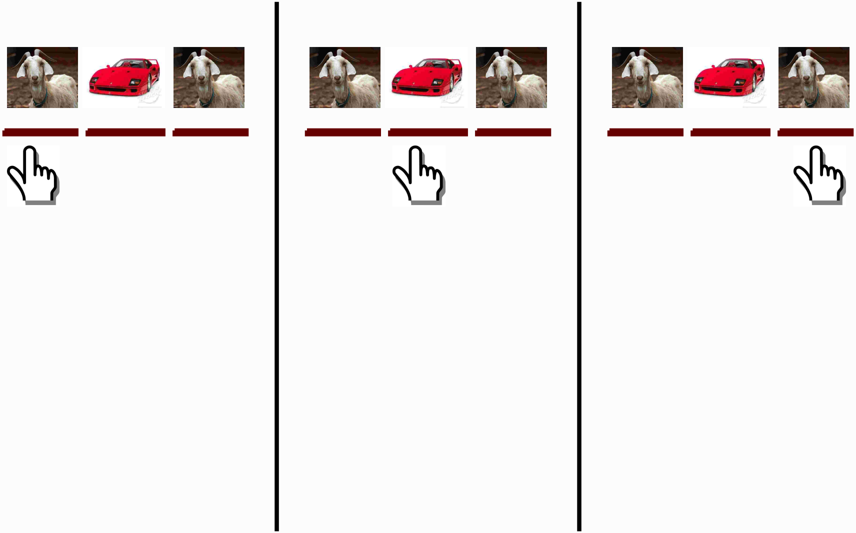
Le déroulement du jeu

- Le candidat (qui ignore où est la voiture) doit choisir une porte,
- Le présentateur (qui sait où est la voiture) ouvre une porte...
  ...derrière laquelle se trouve toujours une chèvre...

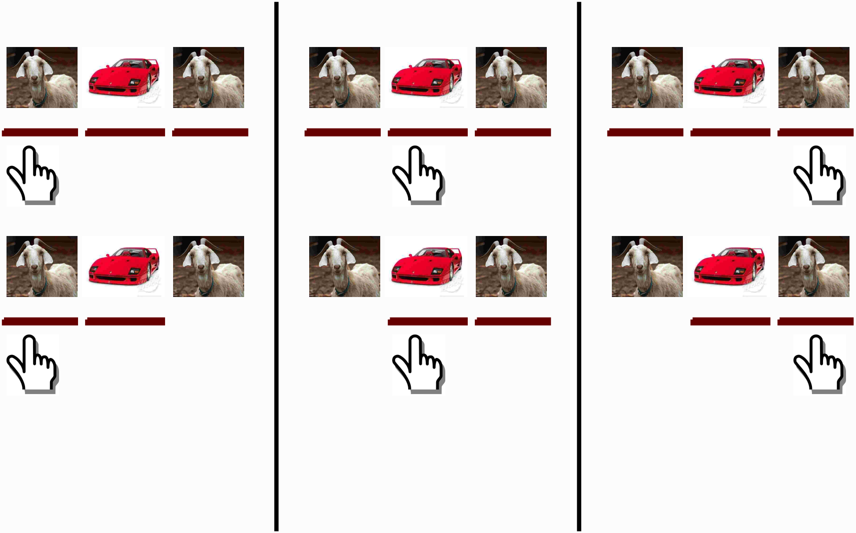
- Le présentateur demande au candidat s’il veut changer de porte...

Que doit faire le candidat ?

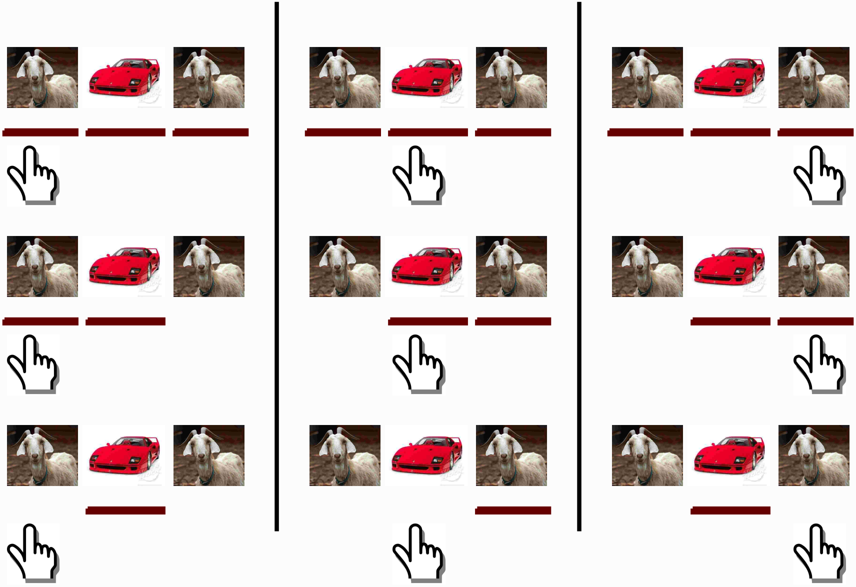
Que doit faire le candidat ?



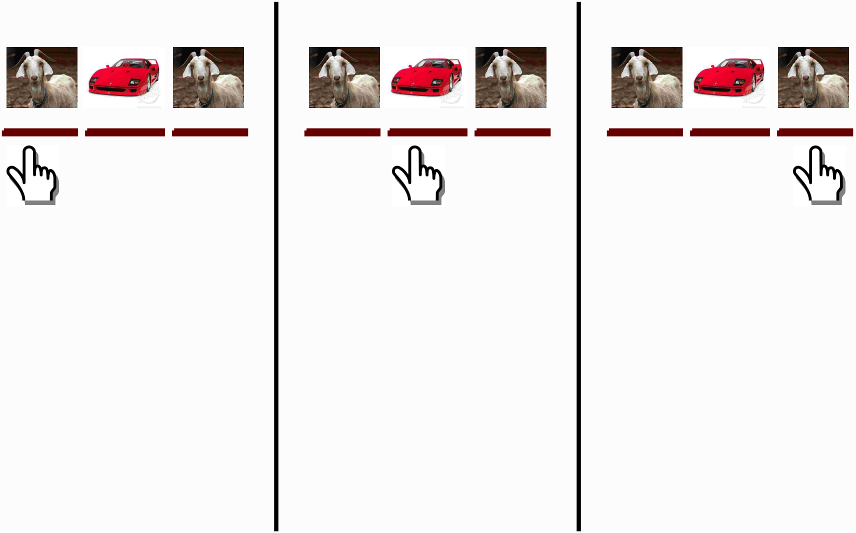
Que doit faire le candidat ?



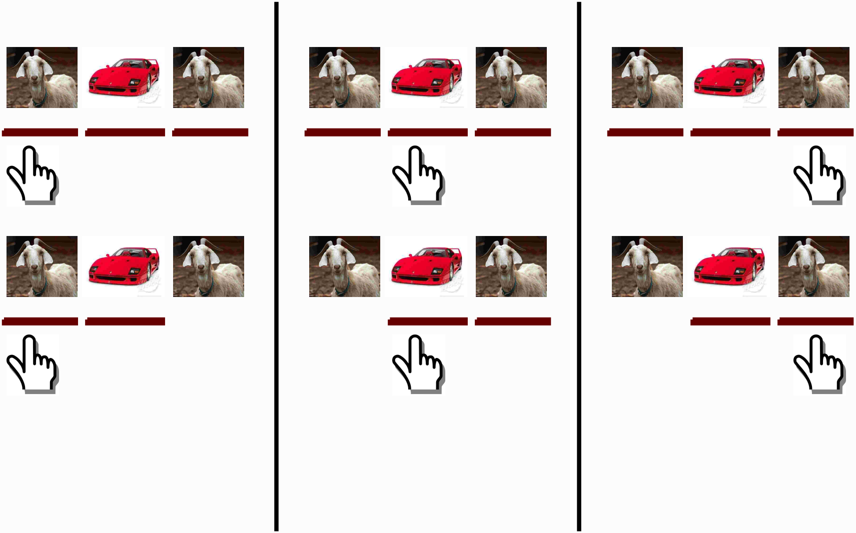
Que doit faire le candidat ? Garder sa porte $\rightsquigarrow$ 1/3



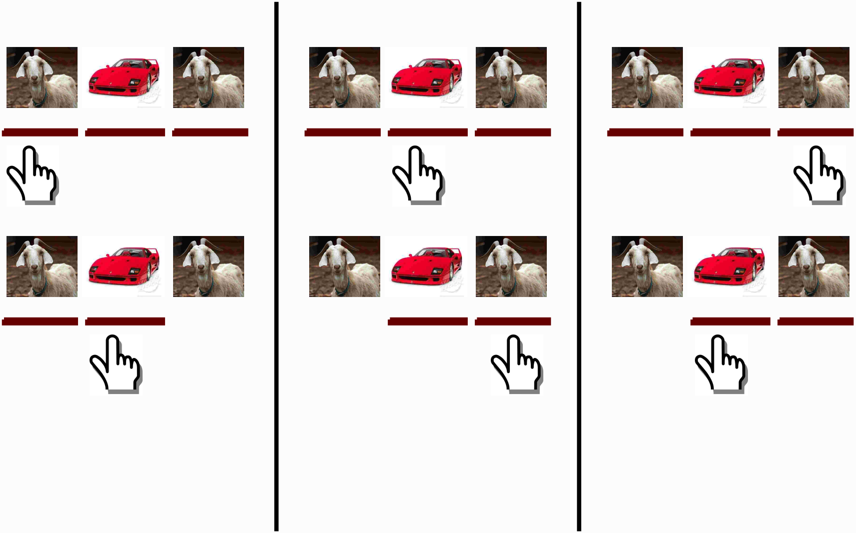
Que doit faire le candidat ?



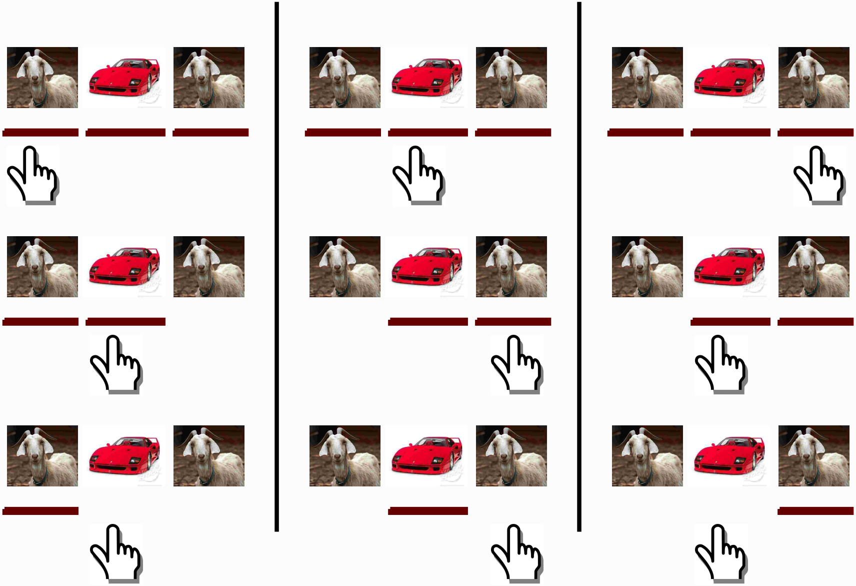
Que doit faire le candidat ?



Que doit faire le candidat ?



Que doit faire le candidat ? Changer de porte $\leadsto$ 2/3



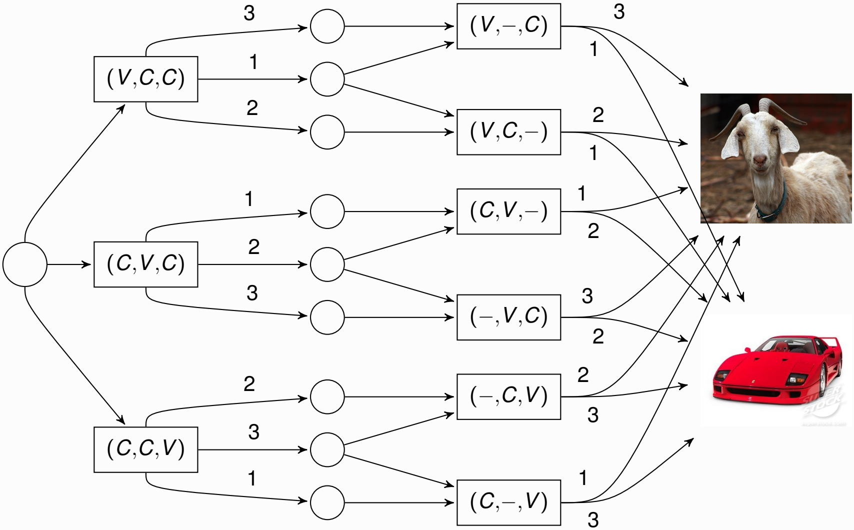
Que doit faire le candidat ?

Il doit toujours accepter de changer de porte !

Plan de l'exposé

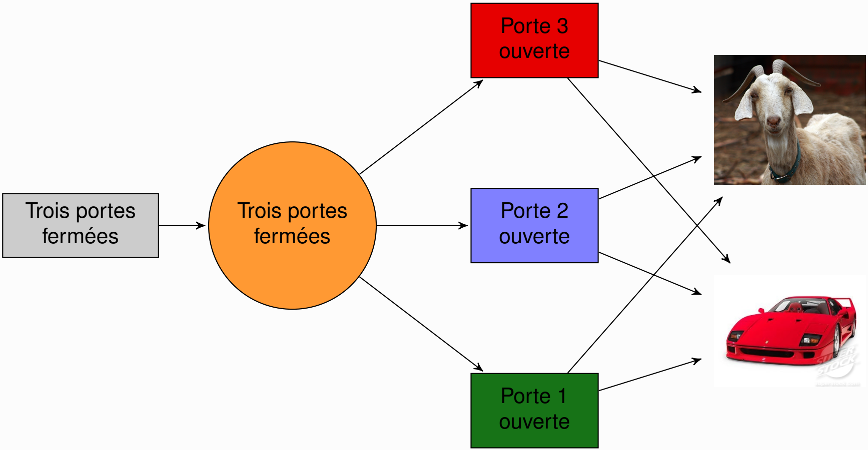
Modélisation du problème de Monty Hall

Le point de vue du présentateur



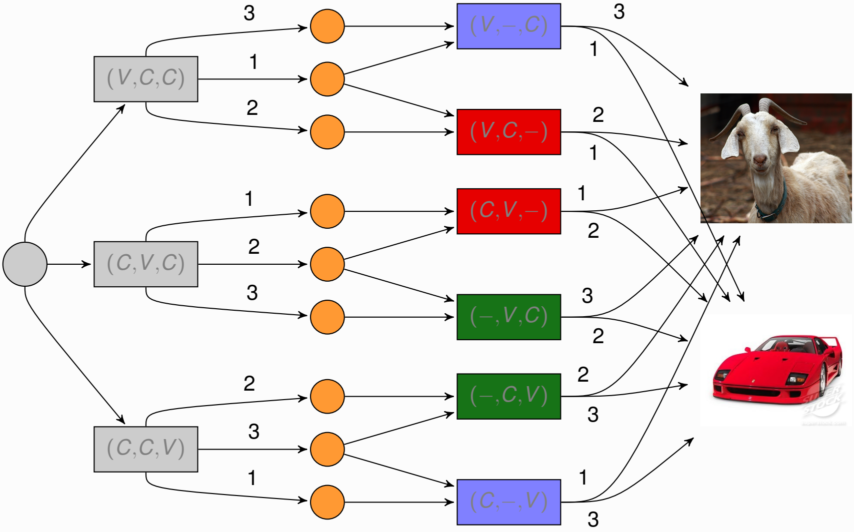
Modélisation du problème de Monty Hall

Le point de vue du candidat

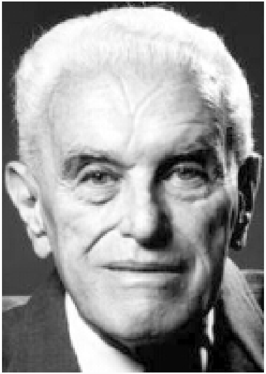


Modélisation du problème de Monty Hall

Une représentation des deux points de vue



La contribution du troisième prix Nobel de 1994



Les jeux à information imparfaite

ont été introduits par J. C. Harsanyi

Applications

- Chercher des stratégies optimales pour *le blackjack, le poker,...*
- Applications en informatique, biologie, économie, politique,...

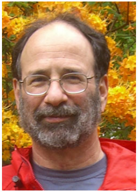
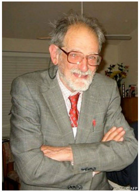
Plan de l'exposé

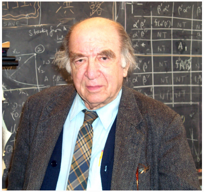
1. Zermelo et le jeu de Nim
   - Jeu de Nim
   - Théorème de Zermelo et applications
2. Selten, Kuhn et la bataille des imprimantes
   - La bataille des imprimantes
   - Théorème de Kuhn et applications
3. Nash et le tir au but
   - Tir au but (ou penalty)
   - Théorème de Nash et applications
4. Harsanyi et le problème de Monty Hall
   - Le problème de Monty Hall
   - Jeux à information imparfaite
5. Pour conclure

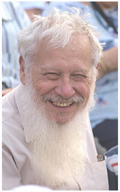
Prix Nobel en théorie des jeux

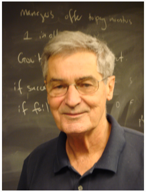
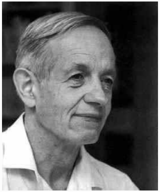
- In 2012: Alvin Roth, Lloyd Shapley
- In 2007: Roger B. Myerson, Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin
- In 2005: Robert J. Aumann, Thomas C. Schelling
- In 1996: William Vickrey
- In 1995: Robert E. Lucas Jr.
- In 1994: John C. Harsanyi, John F. Nash Jr., Reinhard Selten
- In 1972: Kenneth J. Arrow
- In 1970: Paul A. Samuelson

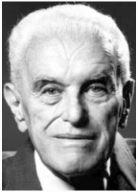
Prix Nobel en théorie des jeux







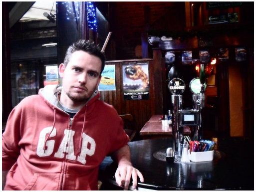
Théorie des jeux à l'UMONS

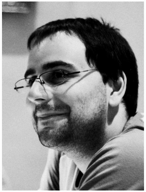
- De nombreux chercheurs travaillent sur des problèmes liés à la théorie des jeux et à ses applications à l'informatique, à la microfinance,...

  Aaron Bohy, Thomas Brihaye, Véronique Bruyère, Julie De Pril, Marc Ducobu, Morgane Estiévenart, Noémie Meunier, Mickael Randour, Cédric Rivière,...

- Un cours de théorie des jeux est organisé en Master 1 en sciences mathématiques.

Théorie des jeux à l'UMONS



Merci!