Mardi 23 juillet 2013

Problème 1. Montrer que pour toute paire d'entiers strictement positifs, k et n, il existe k entiers strictement positifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (non nécessairement distincts) tels que

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Problème 2. Une configuration de 4027 points du plan est appelée *colombienne* si elle est constituée de 2013 points de couleur rouge et de 2014 points de couleur bleue, et si trois quelconques de ces points ne sont pas alignés. En traçant des droites, le plan est divisé en régions. Un tracé de droites est appelé *bon* pour une configuration colombienne si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- aucune droite tracée ne passe par un point de la configuration ;
- aucune région ne contient des points de couleurs différentes.

Trouver la plus petite valeur de k telle que, pour chaque configuration colombienne de 4027 points, il existe un bon tracé de k droites.

Problème 3. Soit ABC un triangle. Le cercle exinscrit au triangle ABC opposé au sommet A est tangent au côté BC au point A_1. Les points B_1 sur CA et C_1 sur AB sont définis de la même façon, en utilisant les cercles exinscrits opposés à B et C respectivement. On suppose que le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ est un point du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Le cercle exinscrit *au triangle ABC opposé au sommet A est le cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C. Les cercles exinscrits opposés à B et à C sont définis de la même manière.*

Temps accordé: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mercredi 24 juillet 2013

Problème 4. Soit ABC un triangle d'orthocentre H dont tous les angles sont aigus ; soit W un point du côté BC, compris strictement entre B et C. Les points M et N sont, respectivement, les pieds des hauteurs issues de B et de C. On note ω_1 le cercle circonscrit au triangle BWN et X le point de ω_1 tel que $[WX]$ en soit un diamètre. De la même façon, on note ω_2 le cercle circonscrit au triangle CWM et Y le point de ω_2 tel que $[WY]$ en soit un diamètre. Montrer que les points X, Y et H sont alignés.

Problème 5. On note $\mathbb{Q}_{>0}$ l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs. Soit $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les trois conditions suivantes :

(i) pour tous $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, on a $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) pour tous $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, on a $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) il existe un nombre rationnel $a > 1$ tel que $f(a) = a$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}_{>0}$, on a $f(x) = x$.

Problème 6. Soit $n \geq 3$ un entier. On considère un cercle et $n+1$ points de ce cercle également espacés.
Lors d'un *étiquetage*, chaque point reçoit une étiquette portant l'un des nombres $0, 1, \ldots, n$ de telle sorte que chaque nombre soit exactement utilisé une fois et une seule. Deux étiquetages sont considérés comme les mêmes si l'un peut être obtenu à partir de l'autre par une rotation du cercle. Un étiquetage est appelé *beau* si pour quatre nombres quelconques $a < b < c < d$ figurant sur des étiquettes avec $a + d = b + c$, la corde joignant les points étiquetés a et d ne coupe pas la corde joignant les points étiquetés b et c.

Soit M le nombre d'étiquetages qui sont beaux, et soit N le nombre de couples (x, y) d'entiers strictement positifs tels que $x + y \leq n$ et $\mathrm{pgcd}(x, y) = 1$. Montrer que

$$M = N + 1.$$

Temps accordé: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points