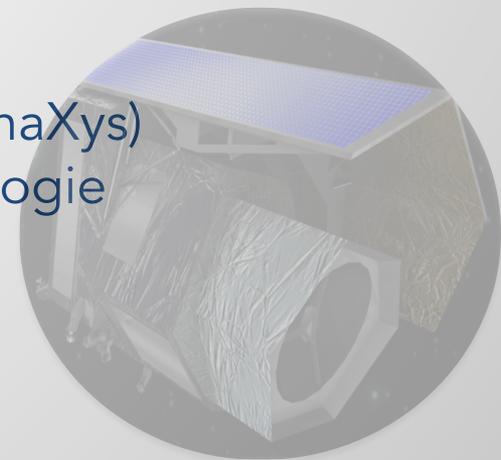




La géométrie de l'Univers: des Eléments d'Euclide au télescope spatial Euclid

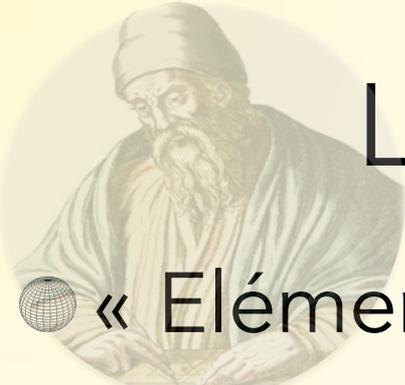
Pr. André Füzfa
Département de Mathématique
Centre Namurois des Systèmes Complexes (naXys)
Action de Recherche Concertée en Cosmologie
(ARCCOS)



Prologue: la forme du monde



C'est dans l'ombre que l'on peut voir
la forme du monde...



La géométrie d'Euclide

● « Eléments » d'Euclide (~300 av. J.-C.)

→ géométrie dans le plan et l'espace, algèbre, théorie des nombres, continuité, etc.

● Origine de la méthode axiomatique

● Cinq postulats seulement à la base de toute la « géométrie de l'espace »

● Seule géométrie connue pendant 2000 ans...





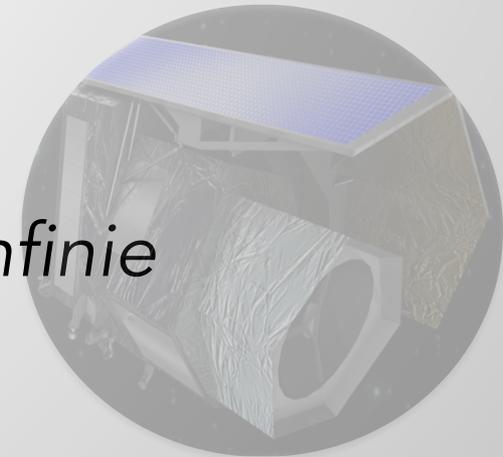
Les cinq postulats d'Euclide

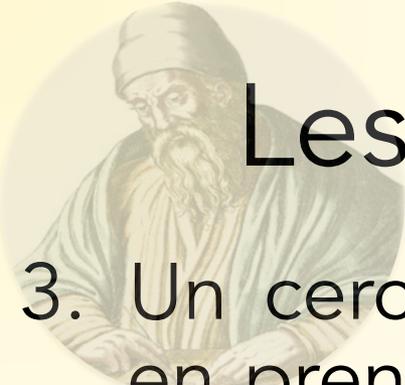
1. Une ligne droite peut être tracée entre deux points quelconques

→ *Continuité de l'espace, structure affine*
Opposition: espaces discrets (grille, etc.)

2. Un segment de droite peut être prolongé en une droite infinie

→ *Toute ligne droite est de longueur infinie*
Opposition : géométrie elliptique





Les cinq postulats d'Euclide

3. Un cercle peut être tracé à partir d'un segment en prenant sa longueur comme rayon et une des extrémités comme centre

→ *Notion de distance métrique*

Opposition: géométrie hyperbolique ou pseudo-riemannienne

4. Tous les angles droits sont équivalents entre eux

→ *« zéros » de la fonction de mesure des angles*

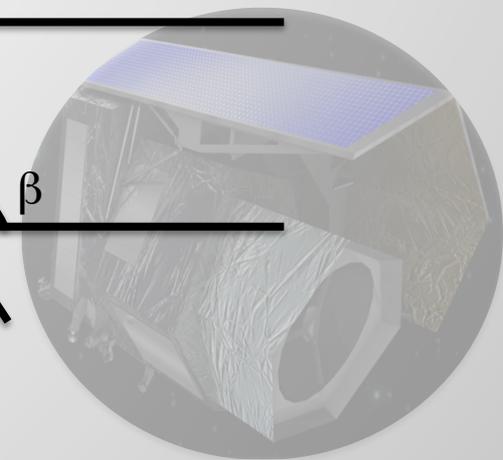
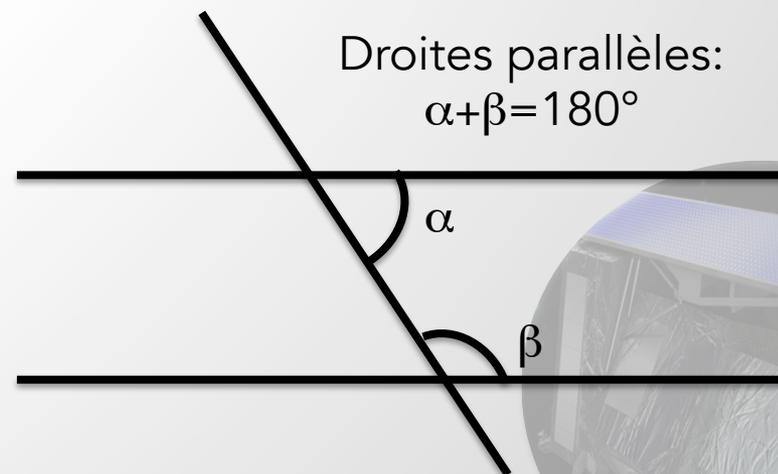
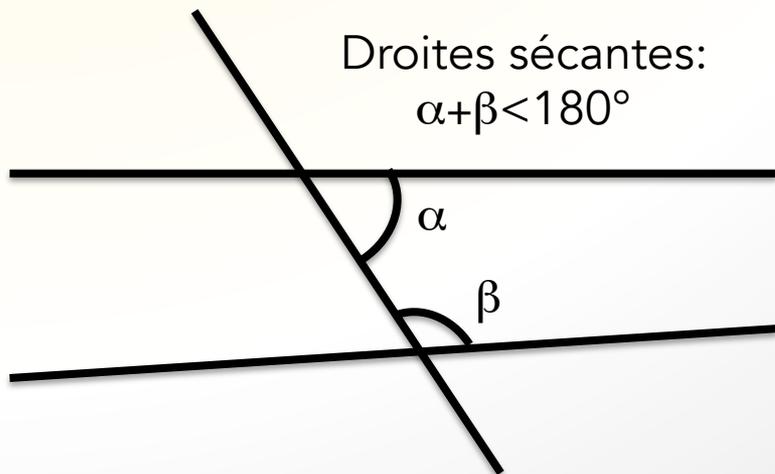
Opposition: géométrie pseudo-euclidienne





Les cinq postulats d'Euclide

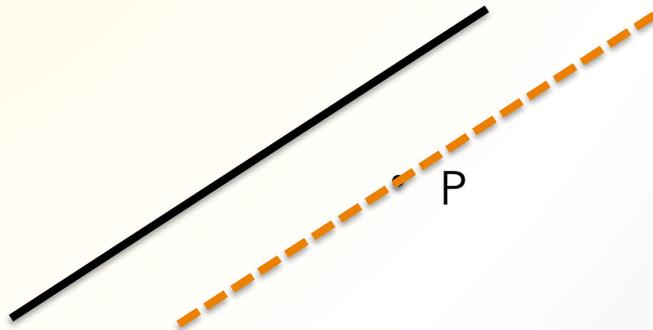
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, alors ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits



L'axiome euclidien du parallélisme

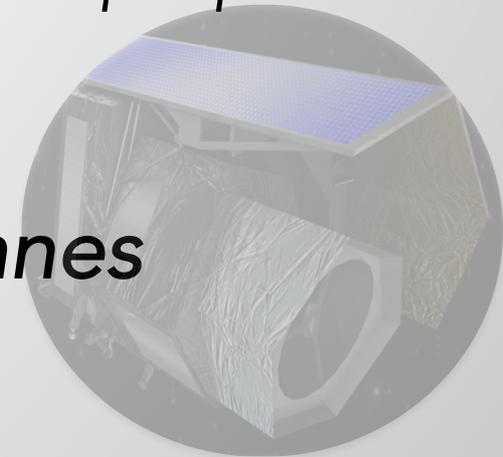
5. Moderne:

Il existe une et une seule droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée



→ *Impossible à déduire comme une proposition découlant des 4 autres postulats...*

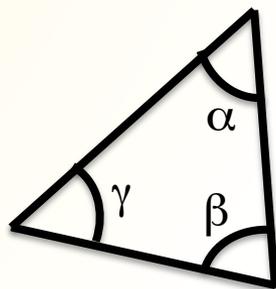
Géométries non-euclidiennes
(XIX^{ème} siècle)





Triangles euclidiens

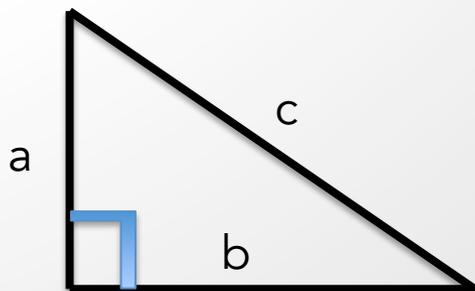
● La somme des angles intérieurs d'un triangle vaut 180°



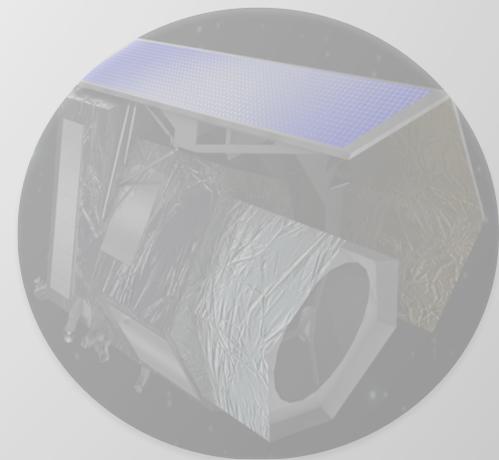
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

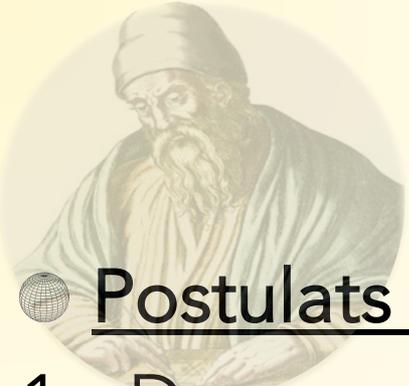
● Triangle rectangle:

Le carré de l'hypoténuse vaut la somme des carrés des deux autres côtés



$$c^2 = a^2 + b^2$$





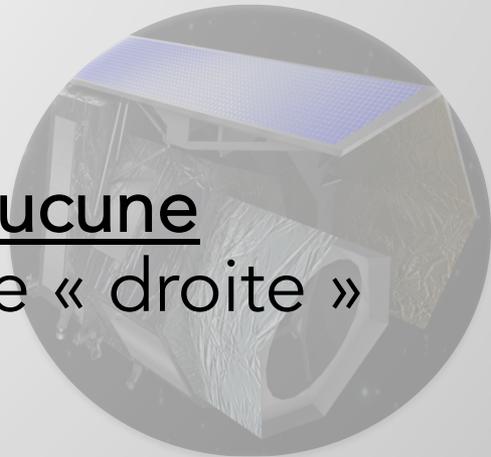
Géométrie elliptique

● Postulats d'Euclide

1. Deux points quelconques déterminent une seule « droite »
2. Toute « droite » est infinie
5. Il existe une seule parallèle à une « droite » donnée

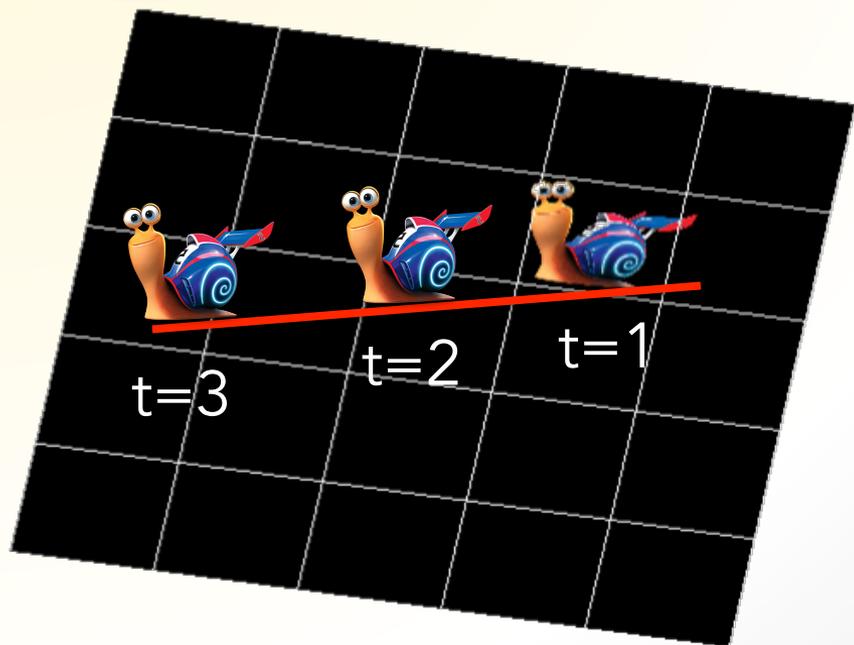
● Postulats de Riemann

1. Deux points quelconques déterminent au moins une « droite »
2. Toute « droite » est sans fin, mais de longueur finie
5. Il n'existe aucune parallèle à une « droite » donnée

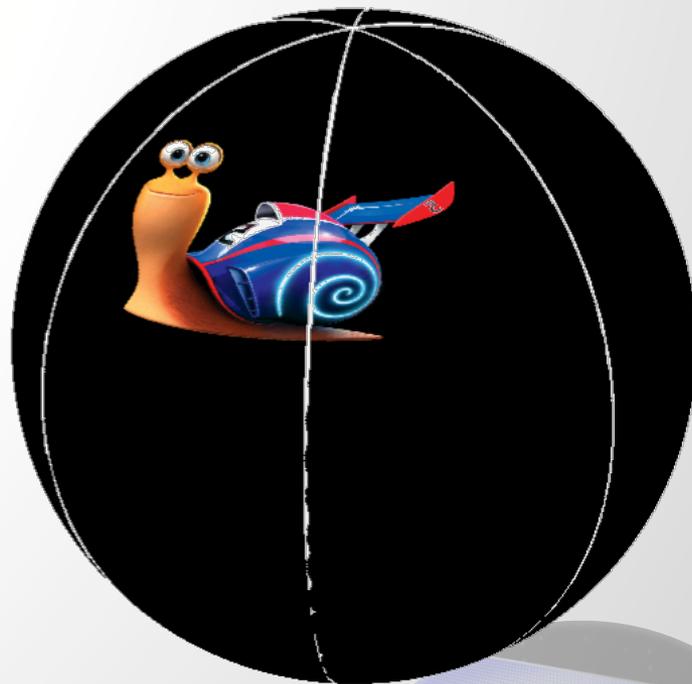


Modèles à 2 dimensions

Pour Euclide : le plan



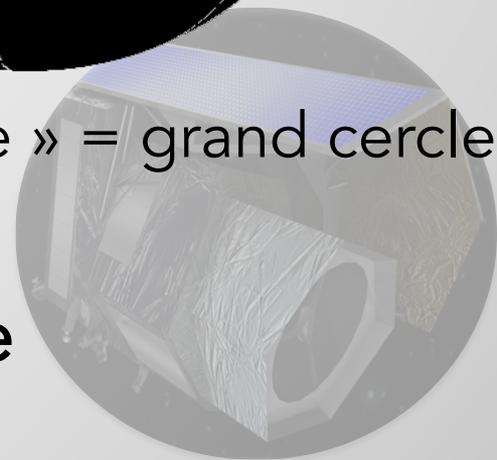
Pour Riemann: la sphère



Ligne droite = plus court chemin

« Ligne droite » = grand cercle

Ligne droite => Géodésique



Parallélisme en géométrie elliptique



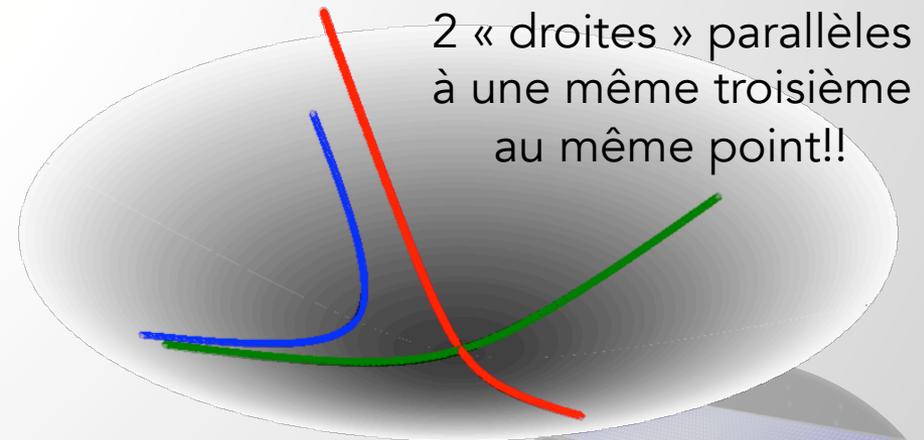
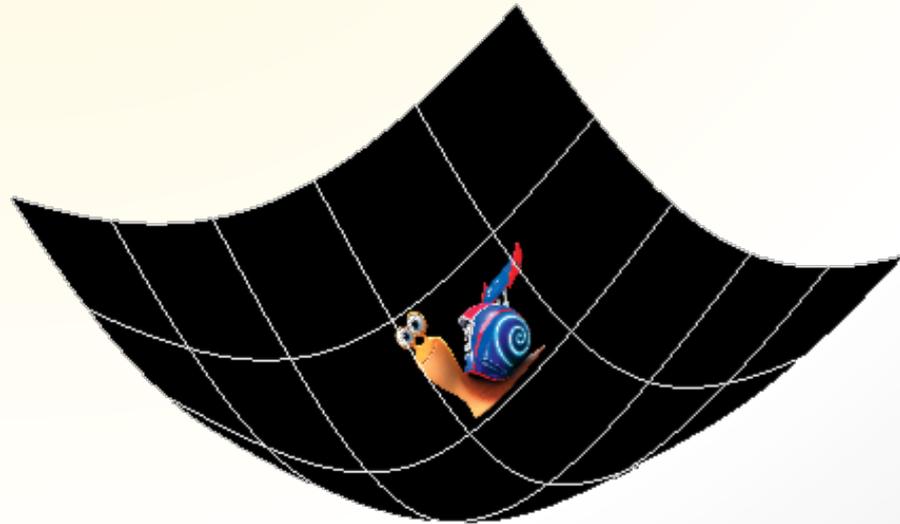
Il n'existe aucune parallèle à une « droite » donnée :

il n'existe aucun grand cercle sans intersection avec un grand cercle donné

Géométrie hyperbolique

🌐 Variante du 5^{ème} postulat:

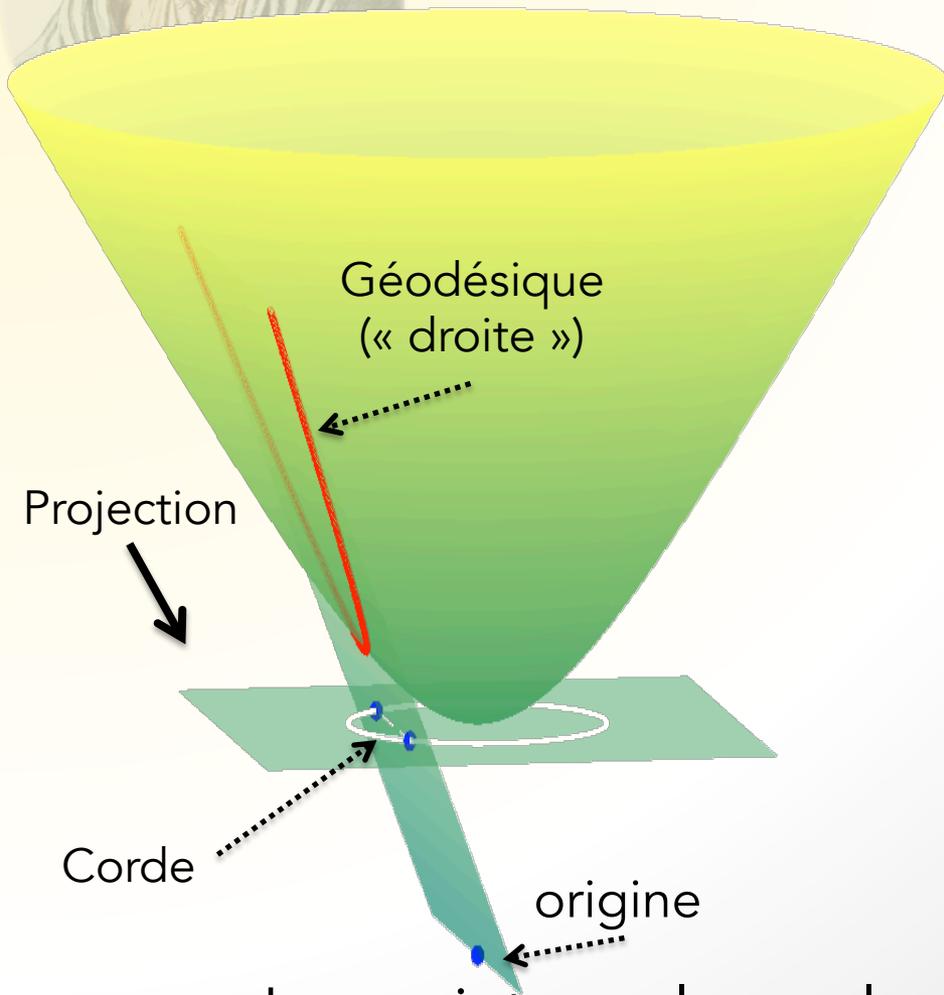
Pour tout point P et toute « droite » d, il existe une infinité de « droites » parallèles à d passant par P



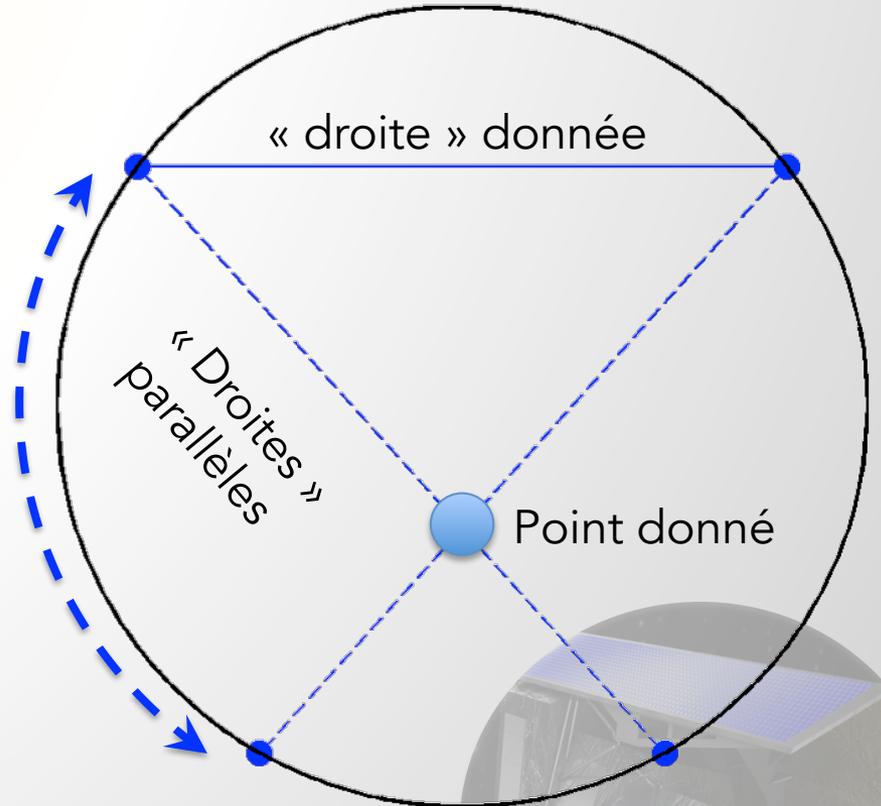
Modèle à 2 dimensions: hyperboloïde
« Droites » = hyperboles



Distances en géométrie hyperbolique



Modèle de Klein-Beltrami



Les points sur le cercle sont à une distance infinie de tous les autres points!

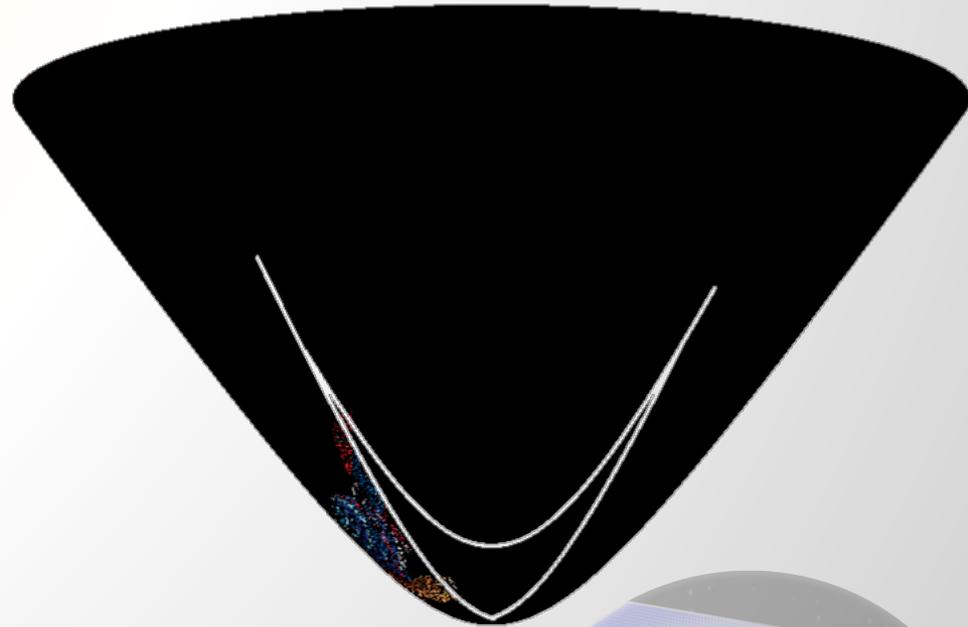
Distance hyperbolique \neq distance euclidienne

Triangles non-euclidiens



2 angles droits

Géométrie elliptique:
somme des angles intérieurs
 $>180^\circ$



Géométrie hyperbolique:
somme des angles intérieurs
 $<180^\circ$

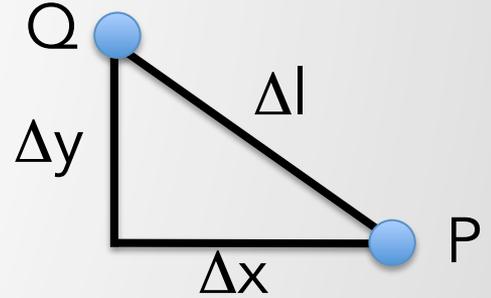


Géométrie pseudo-euclidienne

● Espace euclidien E^2

→ Point $P=(x,y)$

→ Distance euclidienne: $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$



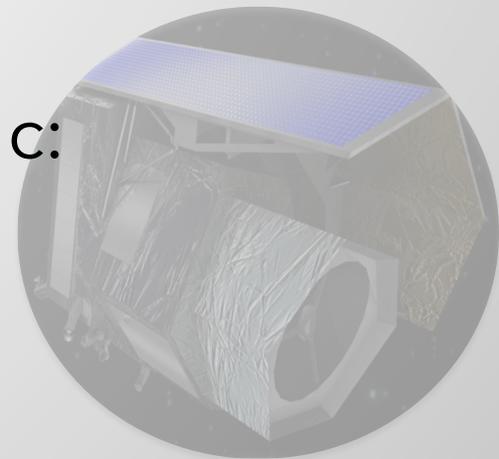
● Espace-temps de Minkowski $R^{1,3}$

→ Point => événement : $P= (c.t,x,y,z)$

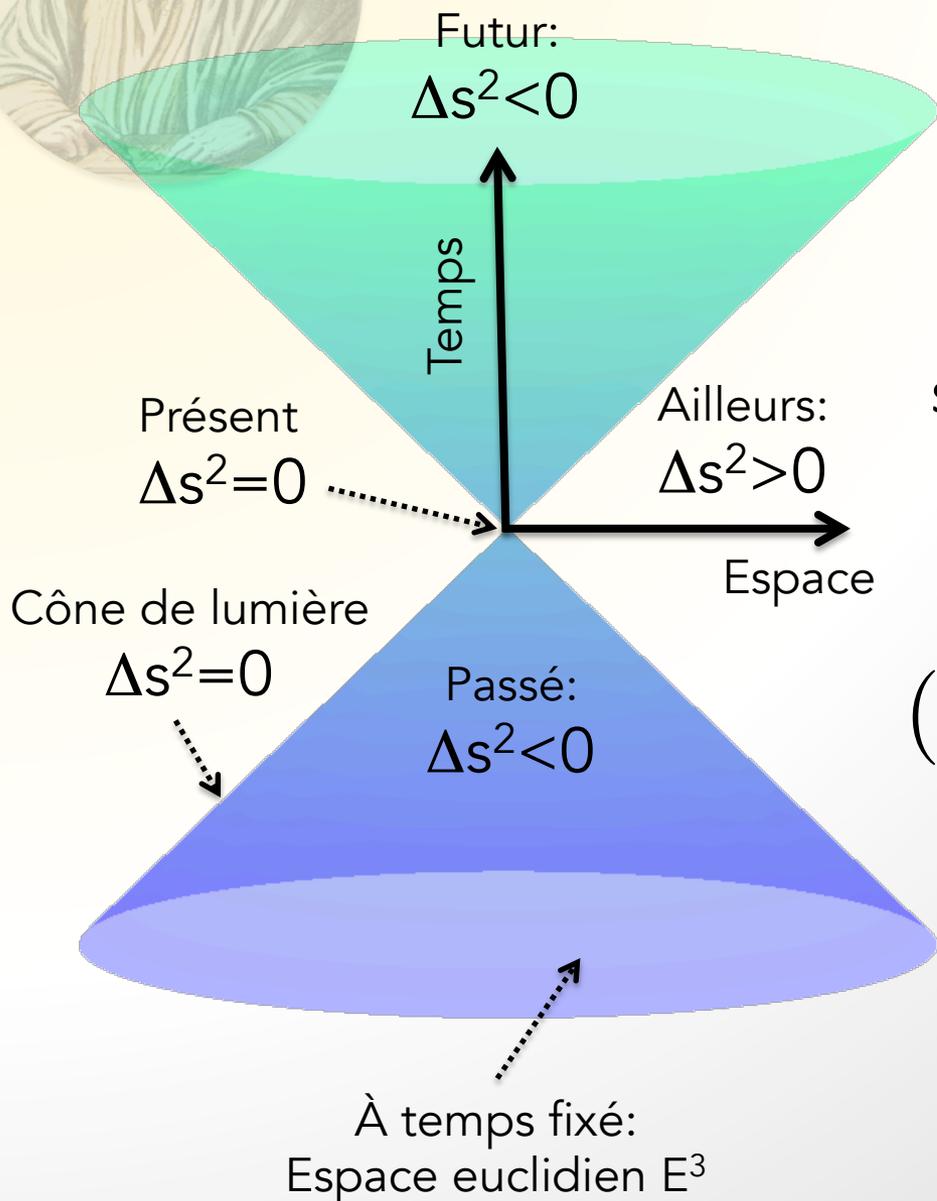
→ Propagation de la lumière: $c = \frac{\Delta l}{\Delta t}$

→ Invariance de la vitesse de la lumière c :
distance pseudo-euclidienne!

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta l^2 = 0$$



Espace-temps de Minkowski



Théorème de Pythagore revisité:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta l^2$$

Cône de lumière:

Des évènements différents sont séparés d'une « distance » nulle!!

Produit scalaire

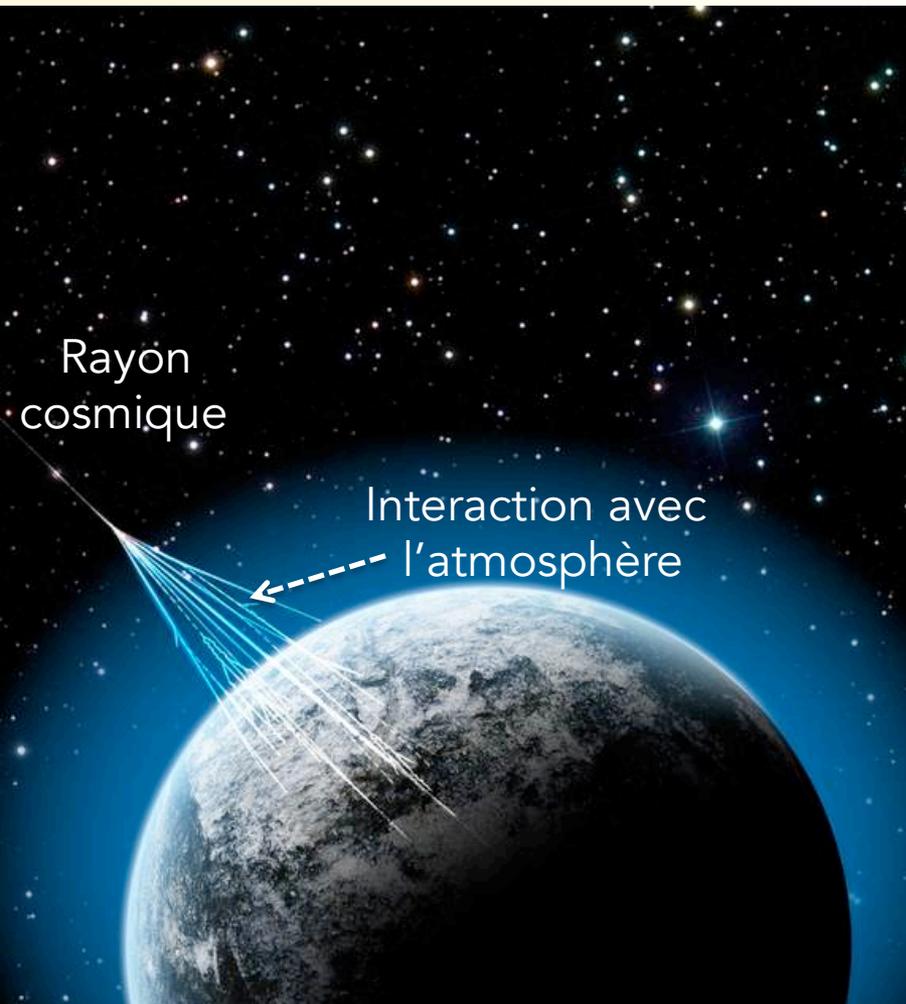
entre 2 quadri-vecteurs:

$$(a|b) = -a_0 b_0 + \vec{a} \bullet \vec{b}$$

$$\text{où } a = (a_0, \vec{a})$$

Il y a deux sortes de quadri-vecteurs orthogonaux!!
(modification du postulat 4)

Dilatation du temps et muons relativistes



Les muons relativistes
voyagent à une vitesse proche de
la lumière: $\Delta s^2 \approx 0$

Invariance de Δs^2 :

Dans notre référentiel:

$$c^2 \Delta t^2 \approx \Delta l^2$$

Dans le référentiel du muon: $\Delta l = 0$

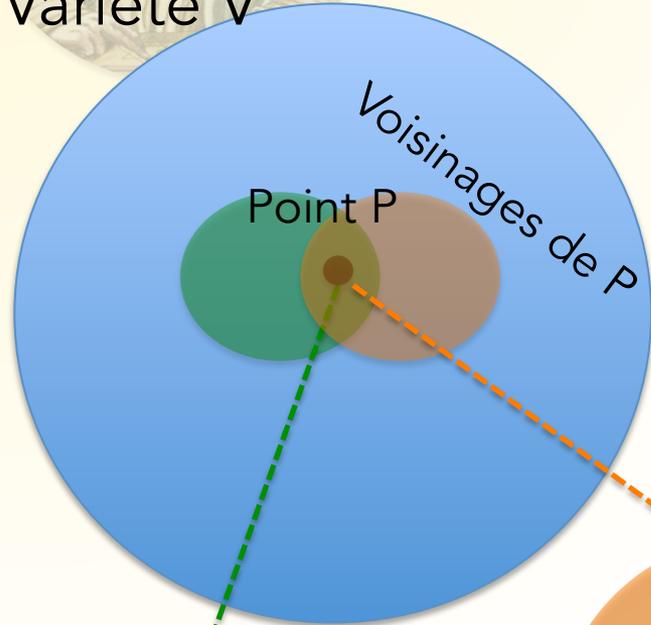
$$\Delta t \approx 0$$

Le temps s'écoule plus lentement
pour le muon relativiste

Géométrie riemannienne



Variété V

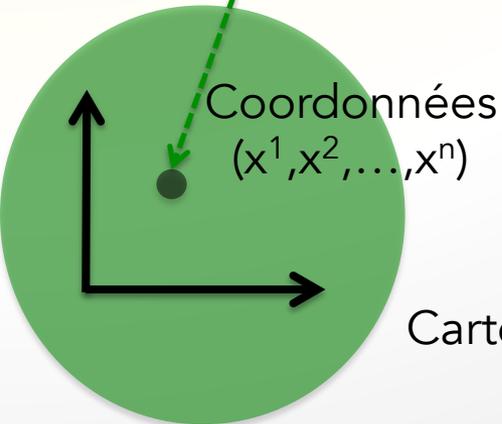


Point P

Voisinsages de P

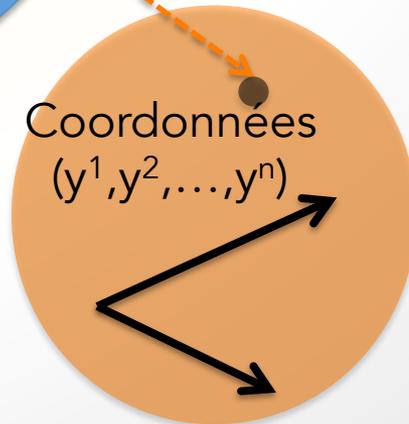
Variété différentiable V :

- « Continue »
- Systèmes de coordonnées locaux (cartes d'un atlas)
- Changements « lisses » de coordonnées



Coordonnées (x^1, x^2, \dots, x^n)

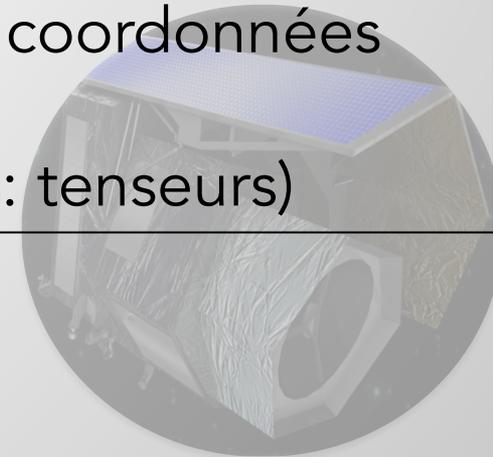
Cartes locales



Coordonnées (y^1, y^2, \dots, y^n)

Caractérisation de la géométrie des variétés indépendante du choix de coordonnées

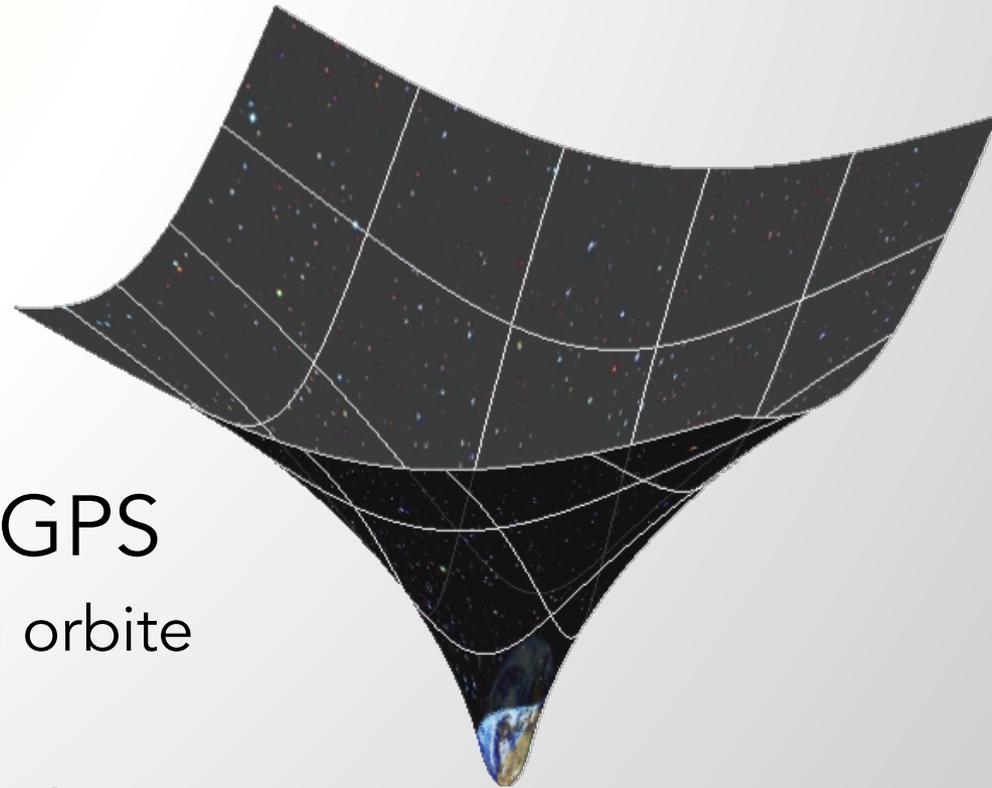
(outils: tenseurs)





Relativité Générale

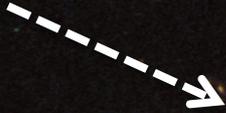
- Géométrie riemannienne de l'espace-temps
 - Invariance des propriétés géométriques par rapport aux observateurs
 - Description géométrique de la gravitation
 - Principe d'équivalence
- Courbure = Matière
- Application : système GPS
 - décalage des horloges en orbite et sur Terre
 - la courbure modifie les durées



Modèle 2D de la géométrie de Schwarzschild autour de la Terre

Le cosmos est non-euclidien!

Arc gravitationnel



Mouvement des corps suivant les géodésiques:

la lumière ne se propage pas en ligne droite!

Quelle est la forme globale de l'Univers?

● Principe cosmologique en relativité générale:

→ univers à chaque instant partout identique

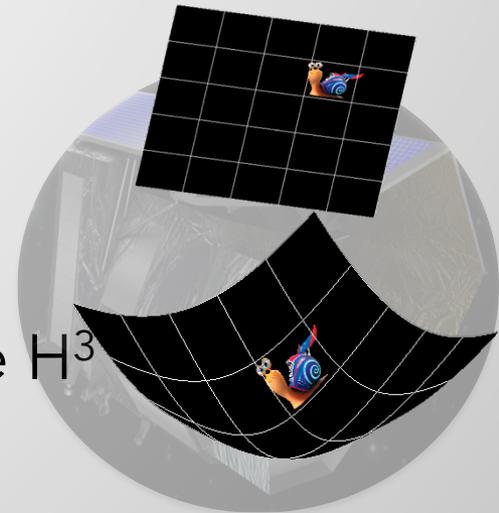
→ propriétés géométriques variables au cours du temps

● Géométrie spatiale (3D) à un instant donné:

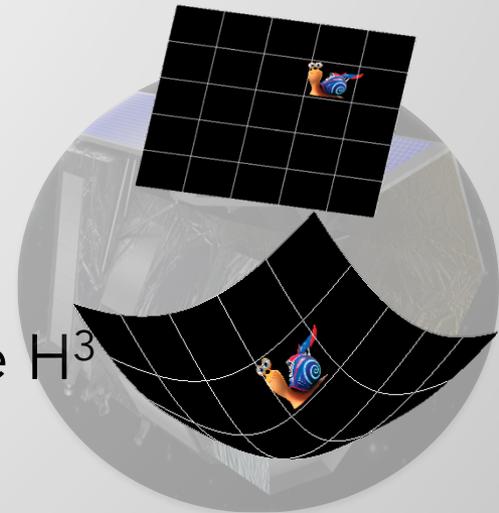
→ courbure constante positive : elliptique S^3



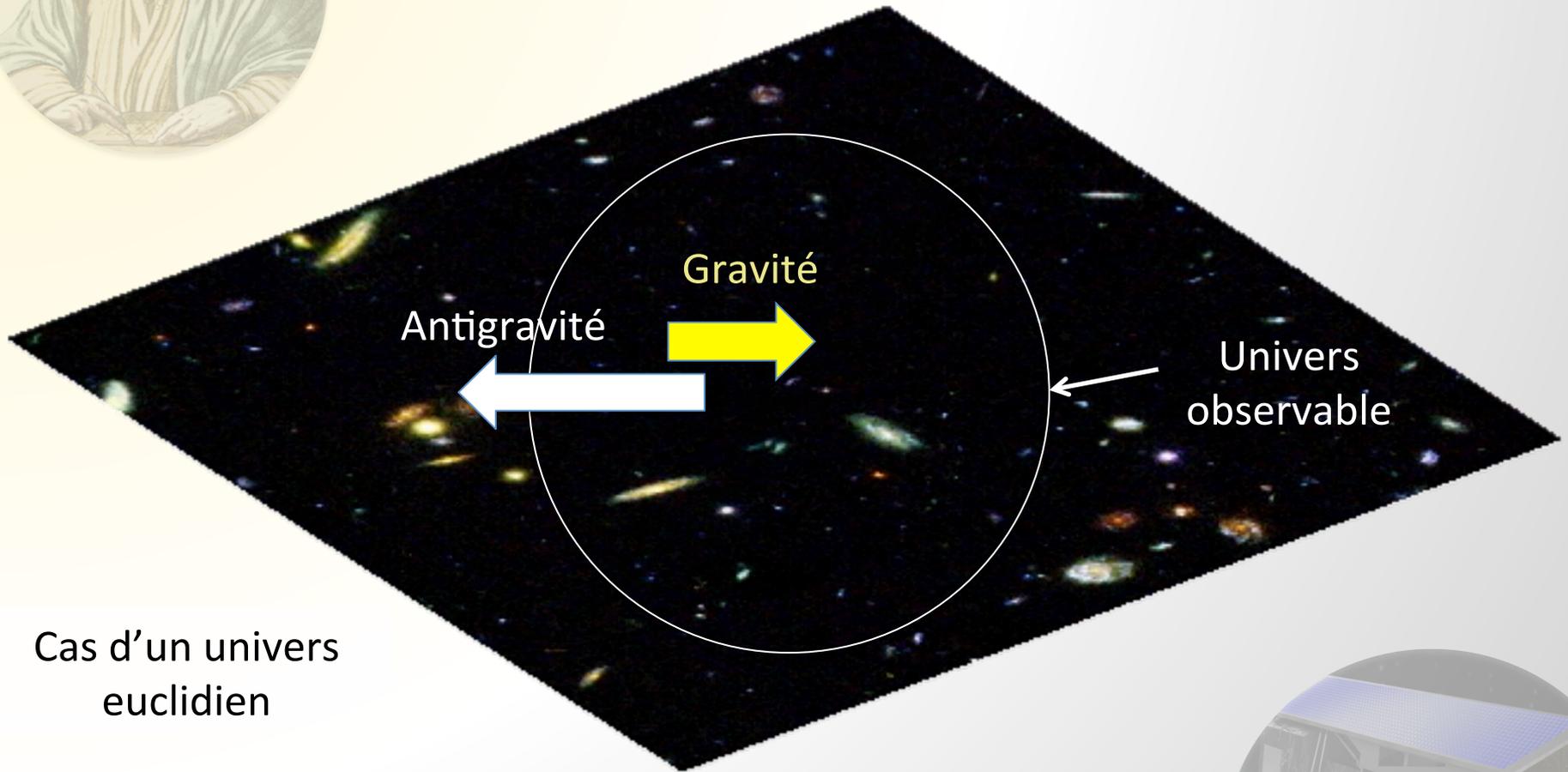
→ courbure constante nulle : euclidienne E^3



→ courbure constante négative : hyperbolique H^3

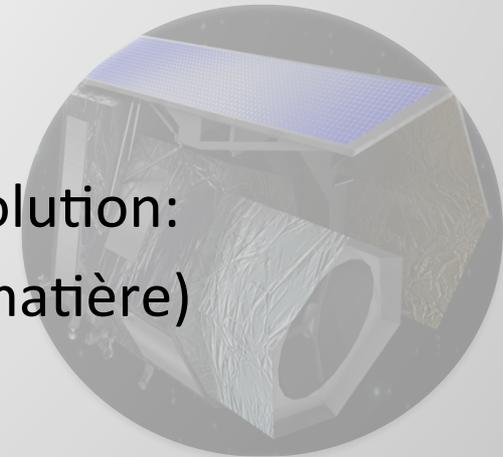


l'Univers: une géométrie instable

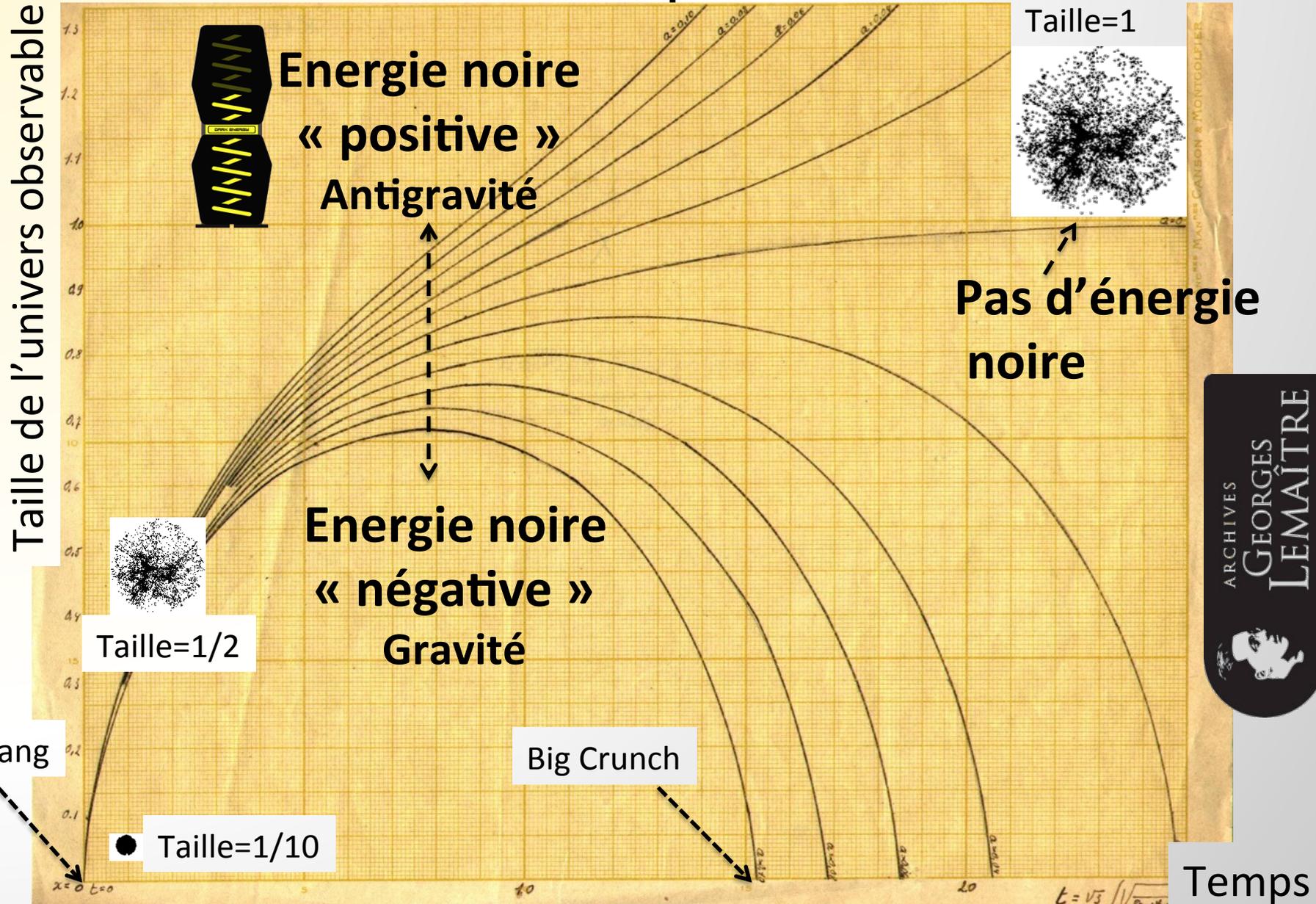


Cas d'un univers euclidien

Principe cosmologique => univers en évolution:
Compétition entre la gravité attractive (matière)
et l'antigravité (énergie noire)



Les univers possibles



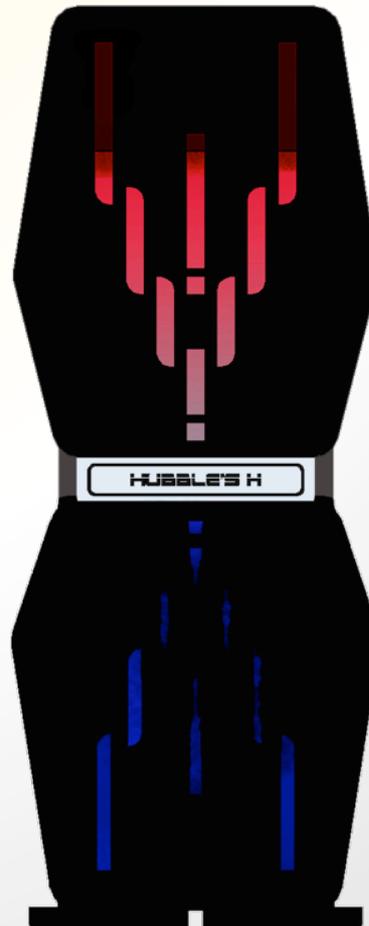
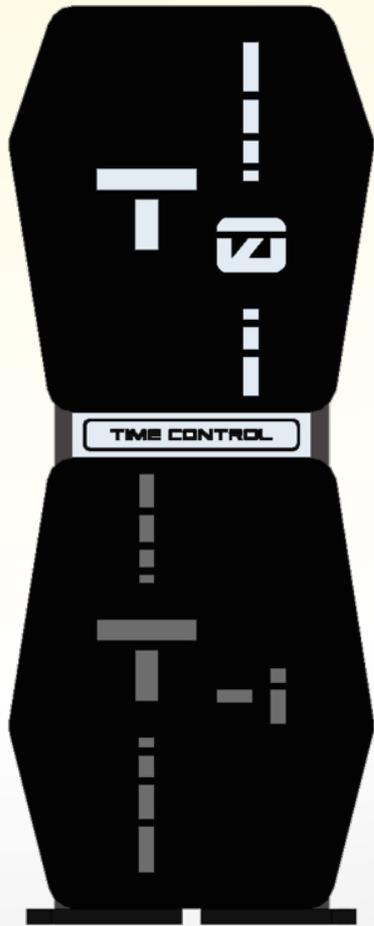
Quelle recette pour réussir son univers?

Epoque où on choisit les paramètres de l'univers

Vitesse d'expansion

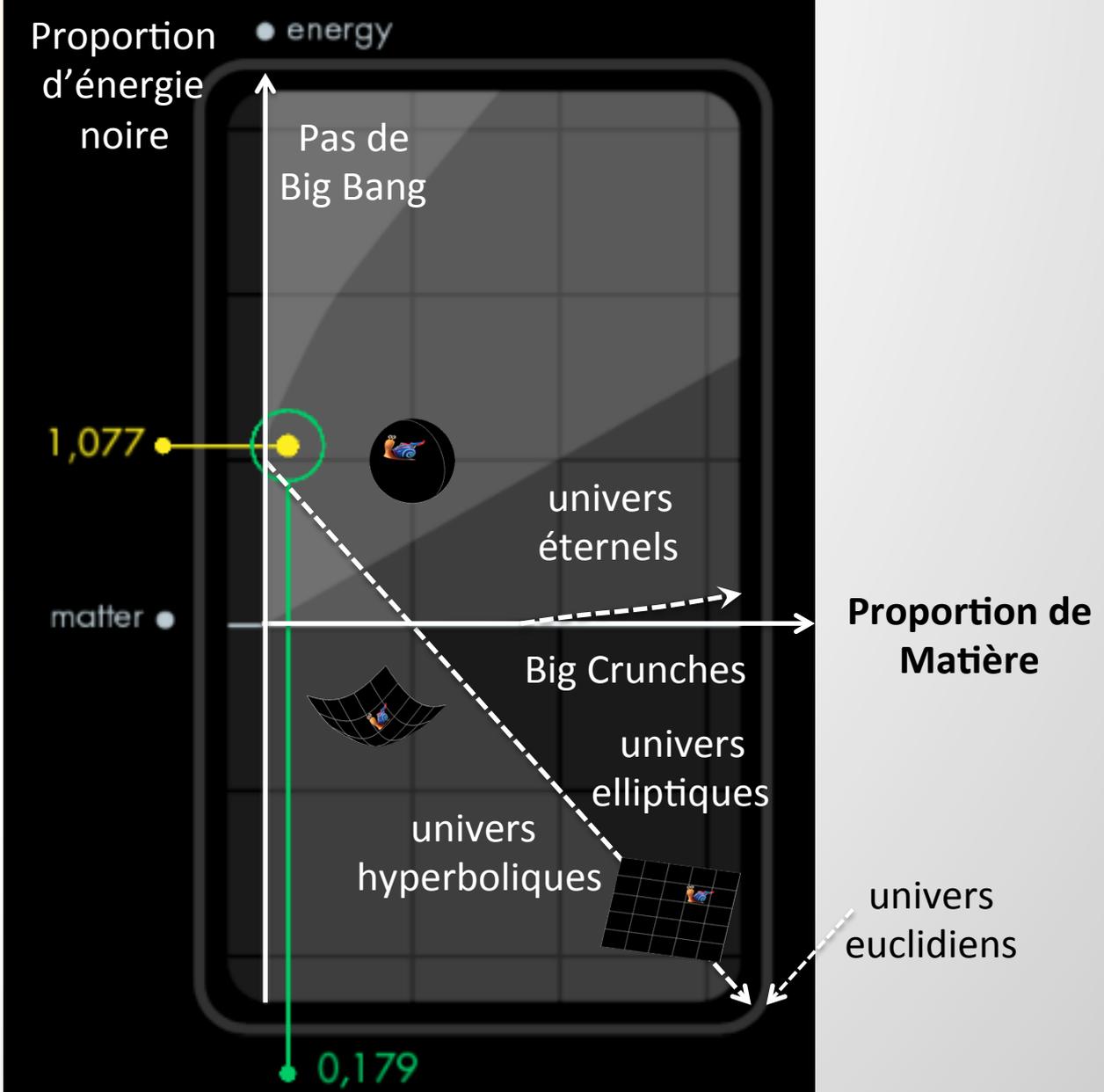
Proportion de matière

Proportion d'énergie noire

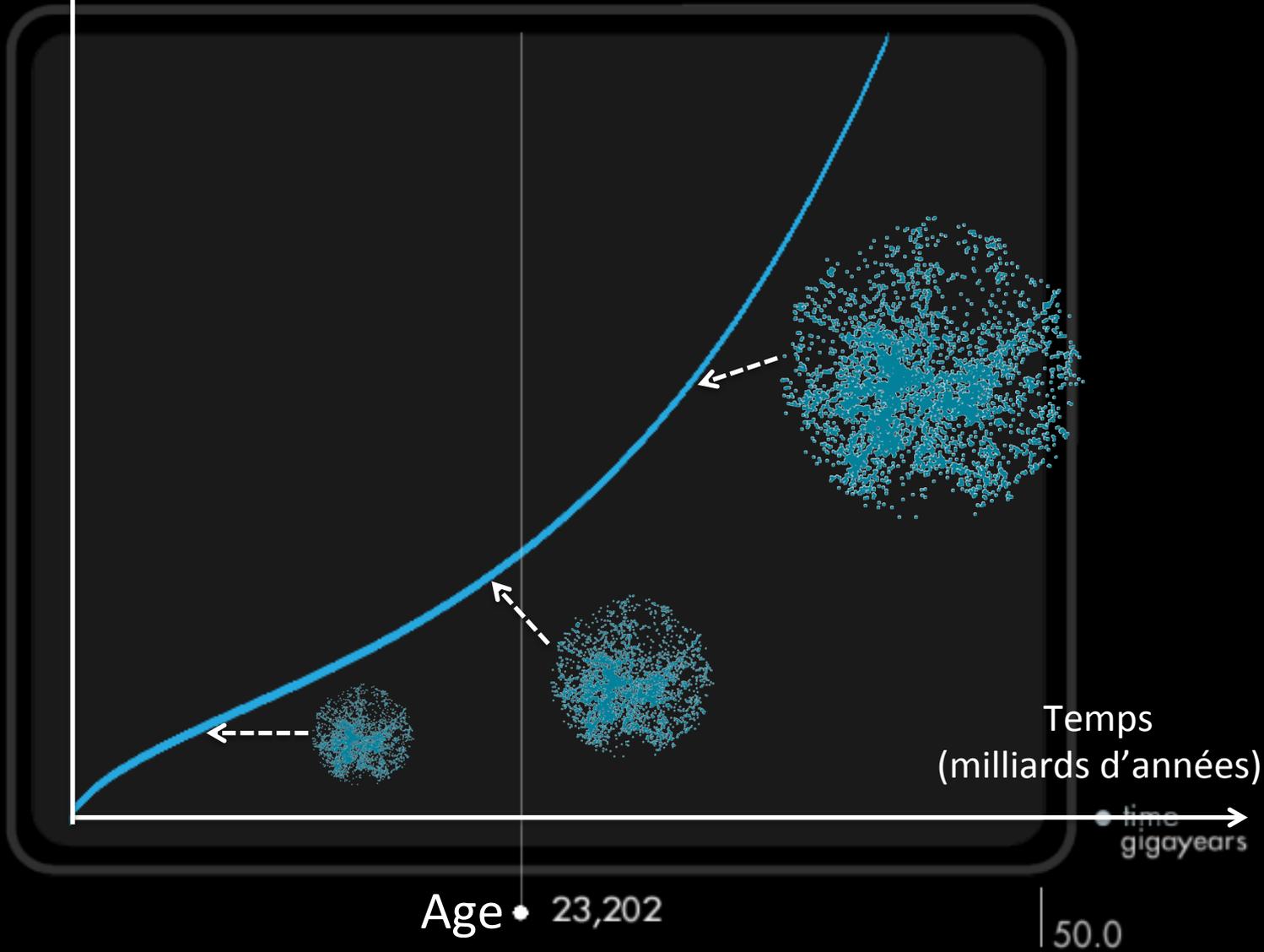


Carte des univers possibles, avec ses points d'intérêts

Le contenu donne sa forme au contenant!!



Taille de l'Univers observable



Temps
(milliards d'années)

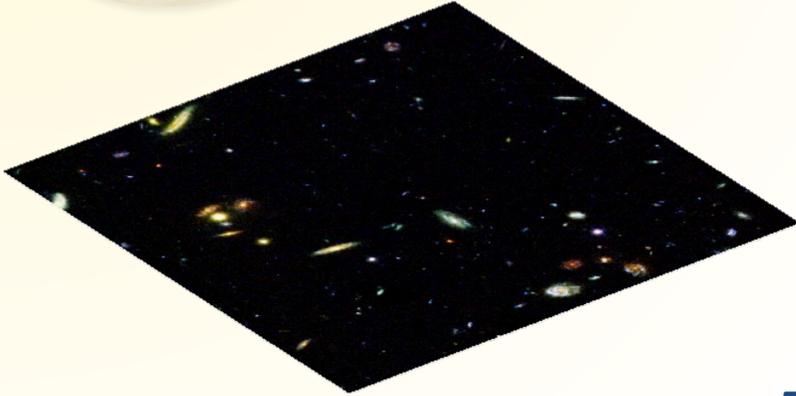
Age • 23,202

50.0

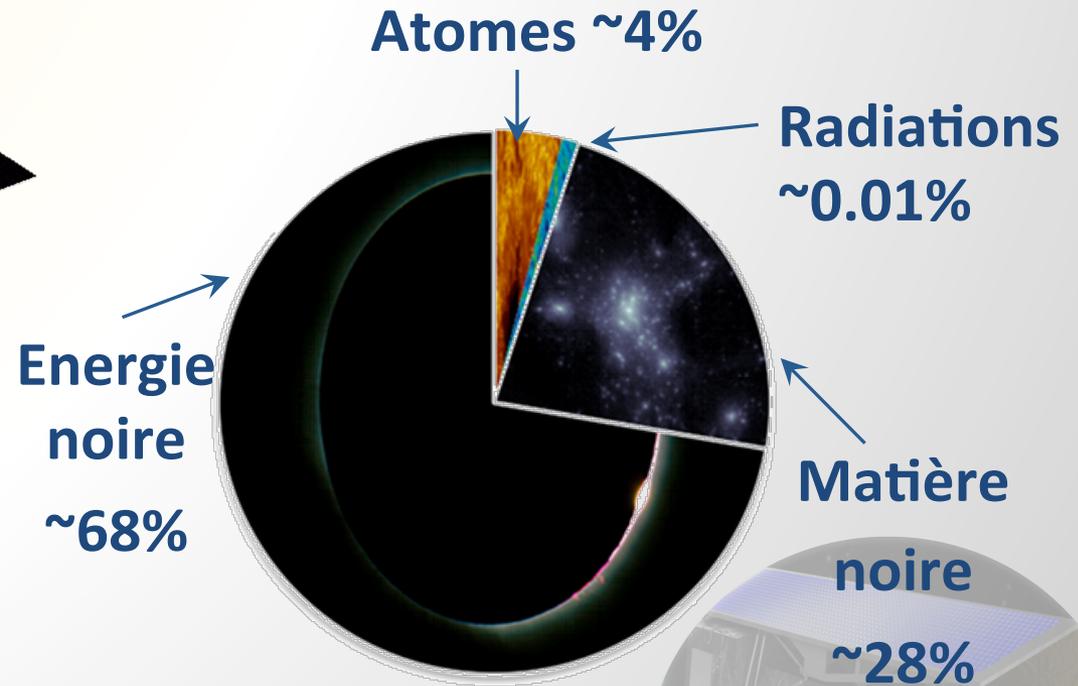
time
gigayears

l'Univers invisible

Courbure presque nulle
de l'Univers *observable*



Composition actuelle en énergie de l'Univers



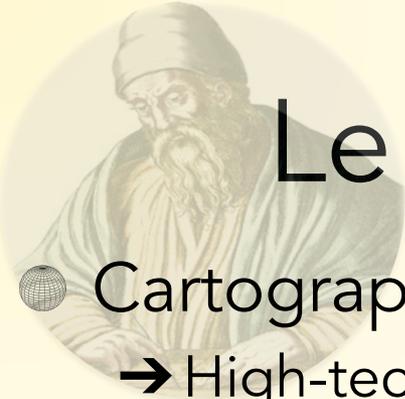
96% du contenu de l'Univers est invisible et inconnu!



Le télescope spatial Euclid

- Mission ESA, lancement prévu en 2020, durée: 6 ans
- Cartographier l'univers invisible :
 - Grand relevé couvrant un tiers du ciel: 10 milliards d'objets observés avec une précision sans précédent
 - « voir » la distribution de matière noire par l'effet de lentilles gravitationnelles ;
 - Nature de l'énergie sombre et de la matière noire par leurs empreintes sur la formation des grandes structures
 - Télescope de 120cm en carbure de silicium en orbite autour du point de Lagrange L2 (1.5 millions de km de la Terre)





Le télescope spatial Euclid

● Cartographier l'univers invisible :

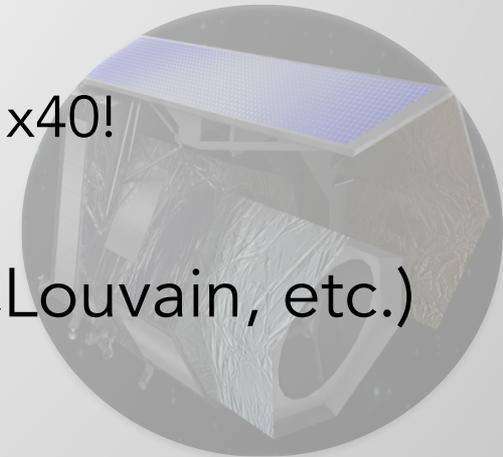
→ High-tech: ultra-stabilité du pointage, détecteurs infrarouges, caméra CCD, émetteurs haute cadence (850 Go/jour)

→ 30 Péta-Octets de données (soit 7 millions de DVDs); 40 ans d'exploitation

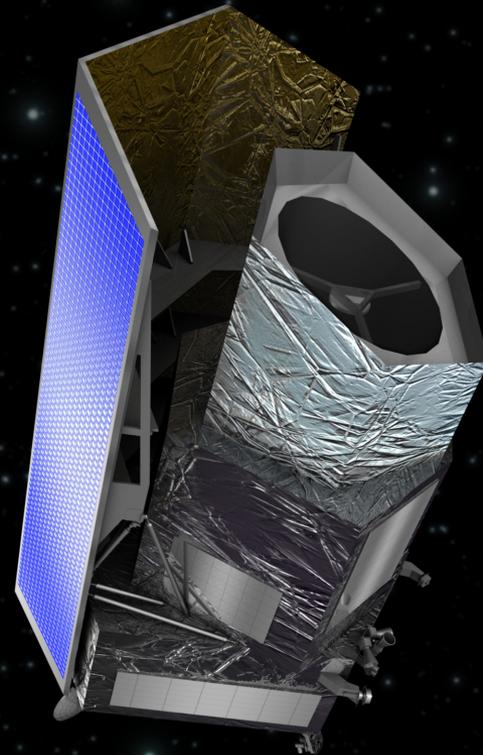
→ Le plus grand consortium scientifique pour une mission spatiale: 1250 pers.

→ Précision sur paramètres de l'énergie sombre : x40!

● Participation belge (UNamur, CSL, ULg, UCLouvain, etc.)



Epilogue: la forme de l'Univers



C'est dans l'ombre que l'on étudie
la forme du monde...