

# Géométrie axiomatique, d'Euclide à Hilbert

QUENTIN BROUETTE

Université de Mons

11 mai 2019

# Etymologie et origine

Notre tradition géométrique remonte à l'antiquité

- ▶ Thales de Milet (environ de 625 à 546 avant JC),
- ▶ Pythagore de Samos (environ de 580 à 495 avant JC),
- ▶ Euclide (environ 300 avant JC),
- ▶ Diophante (?) & Ptolémée (environ 90 à 168 ap. JC) à Alexandrie.

Géométrie : grec ancien, geo- "terre", -métron "mesure".

Etude des droites, plans, cercles, courbes,...

Mathématique(s) : grec ancien, máthema "science, connaissance"

Etude des nombres, fonctions, géométrie,...

Science de l'**argumentation logique**.

# Démarche axiomatique

Au cours de mathématique, on utilise des **théorèmes** et des **formules** pour résoudre des problèmes et effectuer des calculs.  
Comment les théorèmes et formules sont-ils établis ?

# Démarche axiomatique

Au cours de mathématique, on utilise des **théorèmes** et des **formules** pour résoudre des problèmes et effectuer des calculs.  
Comment les théorèmes et formules sont-ils établis ?  
En faisant des **démonstrations**,

# Démarche axiomatique

Au cours de mathématique, on utilise des **théorèmes** et des **formules** pour résoudre des problèmes et effectuer des calculs. Comment les théorèmes et formules sont-ils établis ?

En faisant des **démonstrations**, basées sur :

- ▶ Arguments logiques : vérifiés étape par étape et (presque) irréfutables.
- ▶ Des acquis : théorèmes ou formules démontrés précédemment.
- ▶ Des **suppositions** : définitions, axiomes.

But du mathématicien : démontrer des choses **sophistiquées** avec des suppositions aussi **simples et naturelles** que possible.

# Les éléments d'Euclide

Oeuvre de grande ampleur (environ 300 avant JC) :

- ▶ 13 livres.
- ▶ Référence pendant des siècles.
- ▶ **Démarche axiomatique**, ensuite utilisée dans la majorité des travaux mathématiques.



# Les éléments d'Euclide

Définitions (en tout il y en a 35) :

- ▶ 1. Le point est ce dont la partie est nulle.
- ▶ 2. Une ligne est une longueur sans largeur.
- ▶ 3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
- ▶ 4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
- ▶ 10. Définition d'un angle droit.
- ▶ 15. Définition d'un cercle.

# Les éléments d'Euclide

## 6 Axiomes

- ▶ Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
- ▶ Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
- ▶ Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
- ▶ Tous les angles droits sont égaux.
- ▶ Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.
- ▶ Deux droites ne renferment point un espace.

## L'approche d'Euclide : limites

Les axiomes d'Euclide sont peu précis.

⇒ difficulté de fabriquer des démonstrations solides

D'ailleurs certaines démonstrations sont incomplètes.

### Axiome (Cinquième axiome d'Euclide)

*Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.*

## L'approche d'Euclide : limites

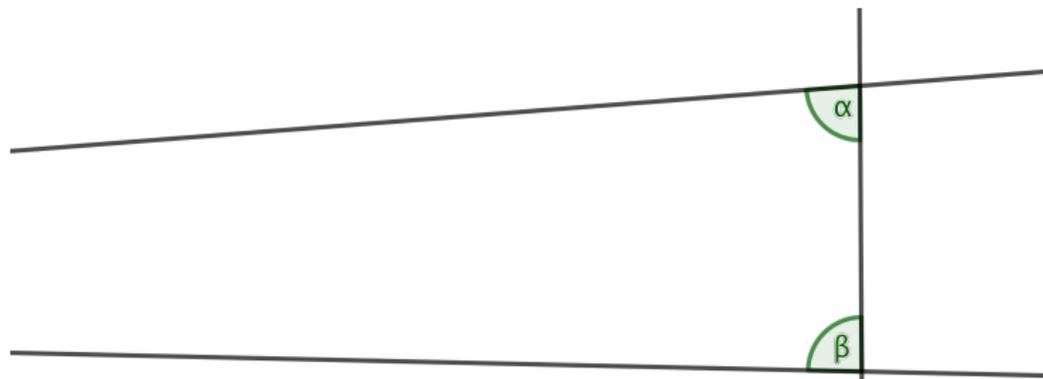
Les axiomes d'Euclide sont peu précis.

⇒ difficulté de fabriquer des démonstrations solides

D'ailleurs certaines démonstrations sont incomplètes.

### Axiome (Cinquième axiome d'Euclide)

*Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.*



$$\alpha + \beta < 180^\circ$$

## L'approche d'Euclide : limites

Les axiomes d'Euclide sont peu précis.

⇒ difficulté de fabriquer des démonstrations solides

D'ailleurs certaines démonstrations sont incomplètes.

### Axiome (Cinquième axiome d'Euclide)

*Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.*

Cet axiome n'est pas naturel (pas intuitif).

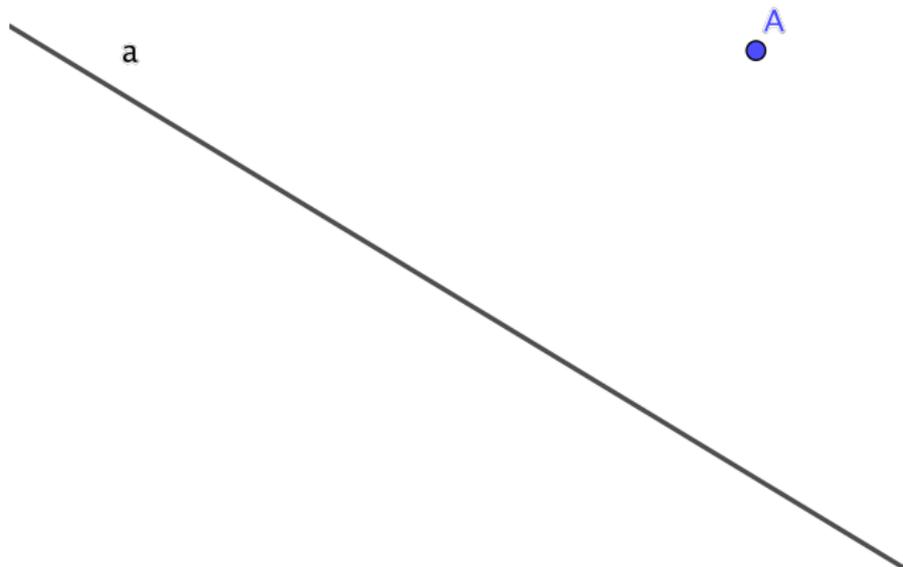
Tentatives de démonstration : Proclus (410-483), Clavius (1538-1612), Simson (1687-1768), Clairaut (1713-1765),...

### Axiome (Cinquième axiome d'Euclide, formulé par Proclus)

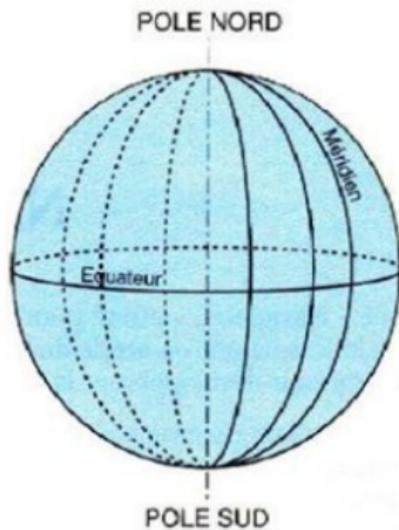
*Etant donné une droite  $a$  et un point  $A$  (qui n'est pas sur  $a$ ), il existe **une seule** droite qui passe par  $A$  et qui ne coupe pas  $a$ .*

## Axiome (Cinquième axiome d'Euclide, formulé par Proclus)

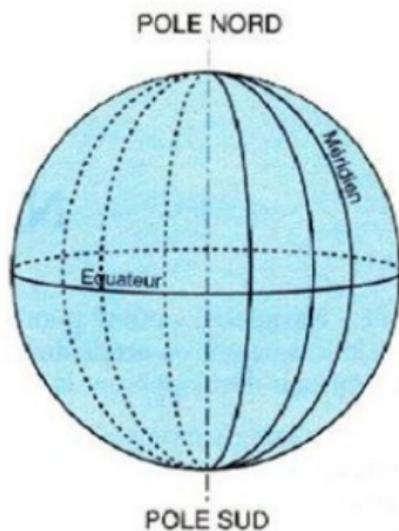
Etant donné une droite  $a$  et un point  $A$  (qui n'est pas sur  $a$ ), il existe **une seule** droite qui passe par  $A$  et qui ne coupe pas  $a$ .



# La géométrie de la sphère



# La géométrie de la sphère



Les droites parallèles n'existent pas.

# Alternatives au cinquième axiome d'Euclide

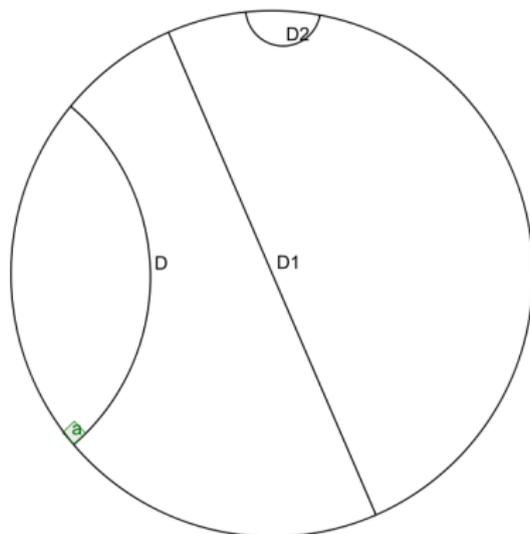
C.F. Gauss (1777-1855), J. Bolyai (1802-1860), N.I. Lobatchevski (1792-1856).

- ▶ Etant donné une droite  $a$  et un point  $A$ , il **n'existe pas** de droite qui passe par  $A$  et qui ne coupe pas  $a$ .
- ▶ Etant donné une droite  $a$  et un point  $A$ , il existe **plusieurs** droites qui passent par  $A$  et qui ne coupent pas  $a$ .

# Disque de Poincaré

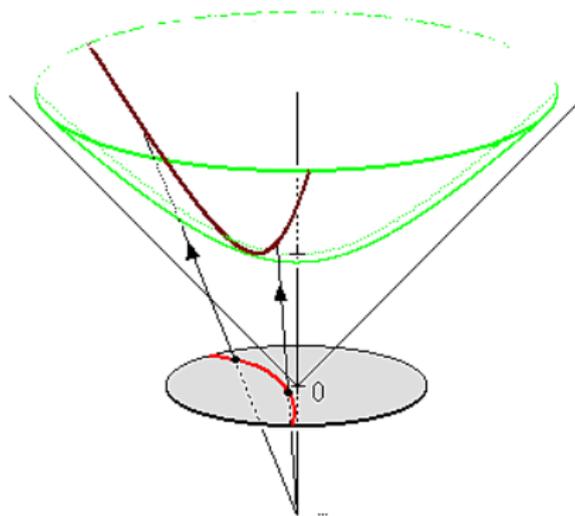
Henri Poincaré (1854-1912)

- ▶ On considère les points à l'intérieur d'un disque (pas au bord).
- ▶ Les droites sont les arcs de cercles perpendiculaires au bord et les droites passant par le centre du disque.



# Intuition physique

Correspondance entre le disque de Poincaré et l'hyperboloïde.

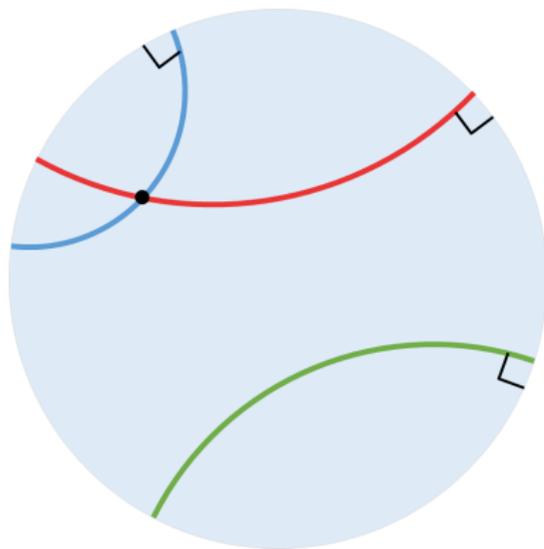


# Intuition physique



# Parallèles dans le disque de Poincaré

## Parallèles dans le disque de Poincaré



Les droites rouge et bleue sont parallèles à la droite verte.

# Mesures d'angles en radians

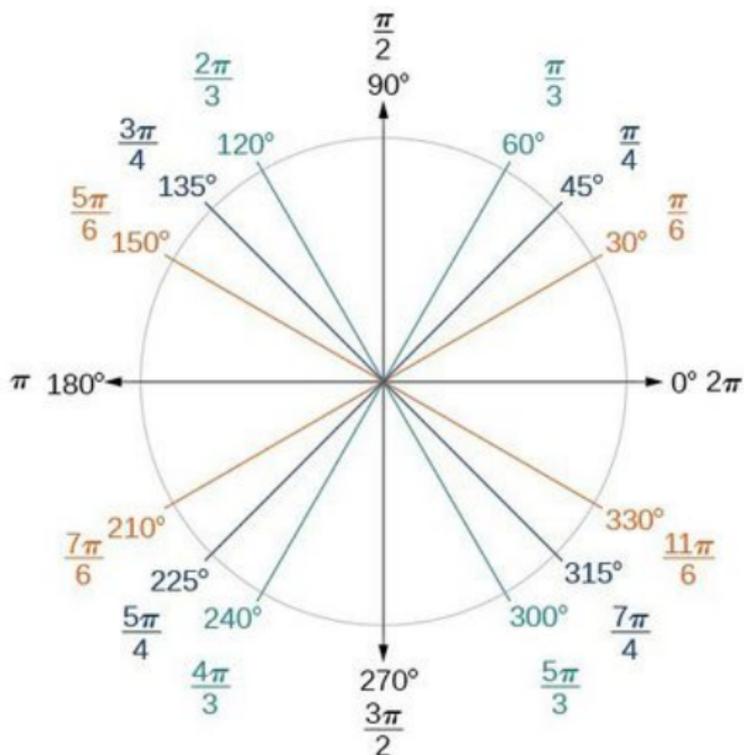
$\pi = 3,141592\dots$  Nombre irrationnel

On mesure les angles en degrés ou en radians.

angle plat = 180 degrés =  $\pi$  radians

Degrees	Radians	Degrees	Radians	Degrees	Radians	Degrees	Radians
0°	0	90°	$\frac{\pi}{2}$	180°	$\pi$	270°	$\frac{3\pi}{2}$
30°	$\frac{\pi}{6}$	120°	$\frac{2\pi}{3}$	210°	$\frac{7\pi}{6}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	135°	$\frac{3\pi}{4}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	150°	$\frac{5\pi}{6}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$

# Mesures d'angles en radians



# Le triangle

## Théorème 1 (Axiome d'Euclide)

*La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à  $\pi$  (un angle plat).*

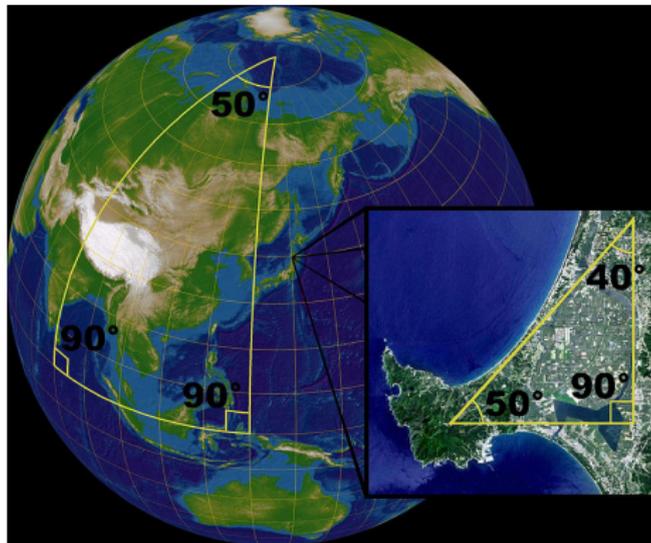
## Théorème 2 (Sur la sphère de rayon 1)

*La somme des mesures des angles d'un triangle d'aire  $T$  est égale à  $\pi + T$ .*

## Théorème 3 (Dans le disque de Poincaré de rayon 1)

*La somme des mesures des angles d'un triangle d'aire  $T$  est égale à  $\pi - T$ .*

# Triangle sphérique



## Aire des fuseaux et des triangles sphériques

**Formule de l'aire (surface) d'une sphère :  $4\pi r^2$ .**

## Aire des fuseaux et des triangles sphériques

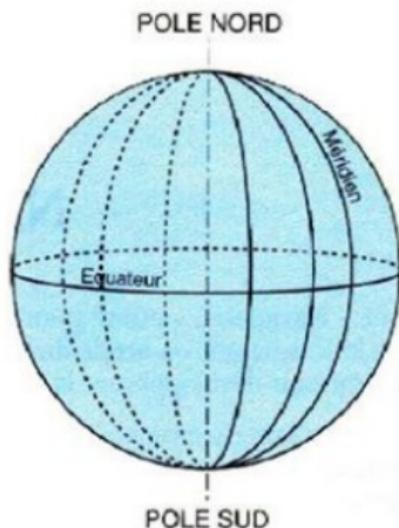
**Formule de l'aire (surface) d'une sphère :**  $4\pi r^2$ . On prend une sphère de rayon 1.

Aire de la sphère =  $4\pi$ .

## Aire des fuseaux et des triangles sphériques

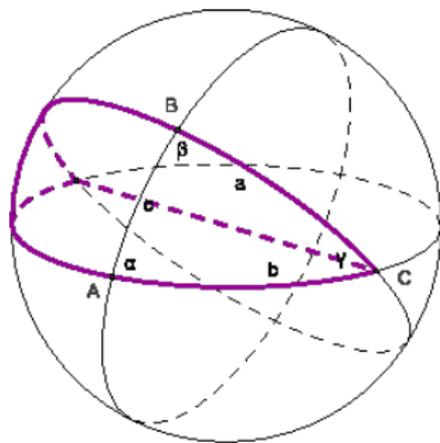
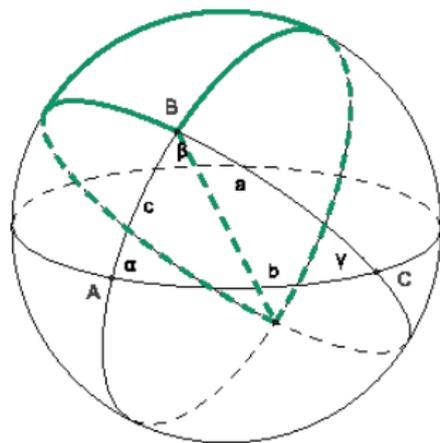
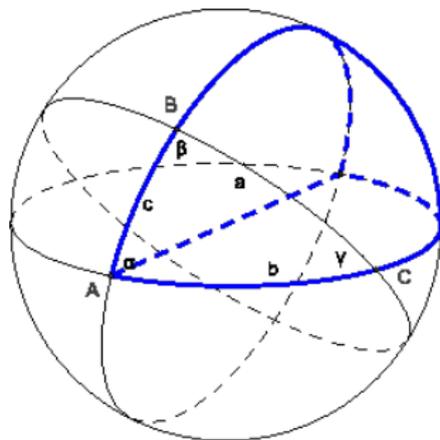
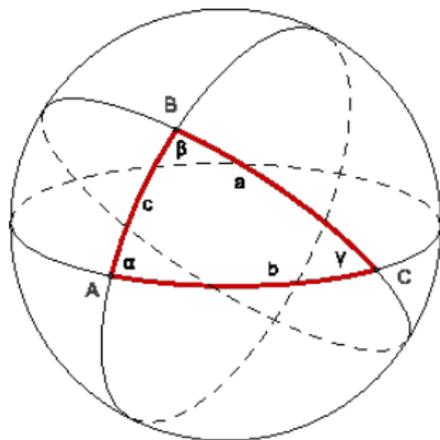
**Formule de l'aire (surface) d'une sphère :**  $4\pi r^2$ . On prend une sphère de rayon 1.

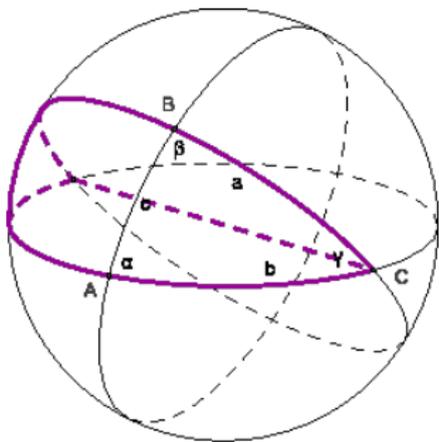
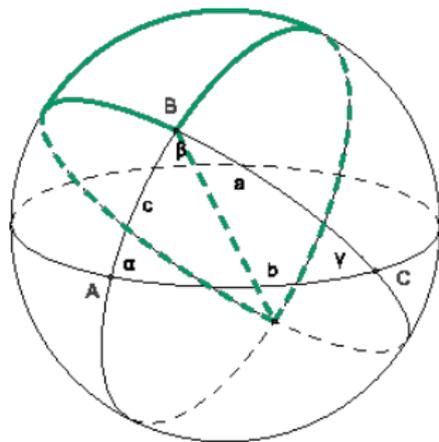
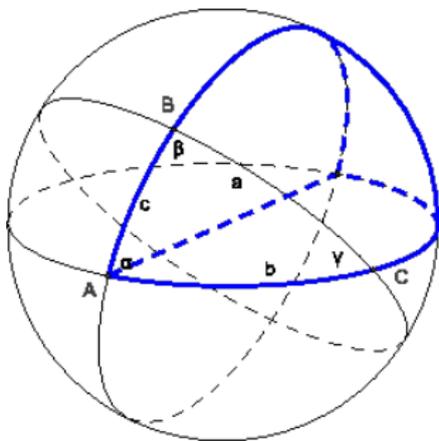
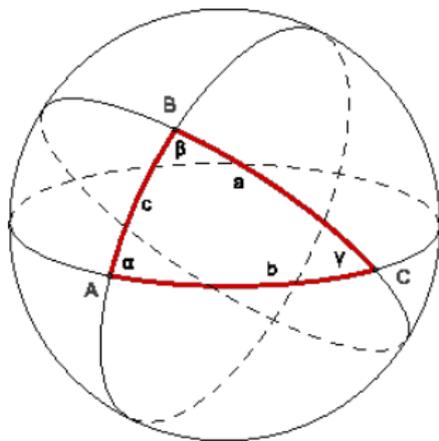
Aire de la sphère =  $4\pi$ .



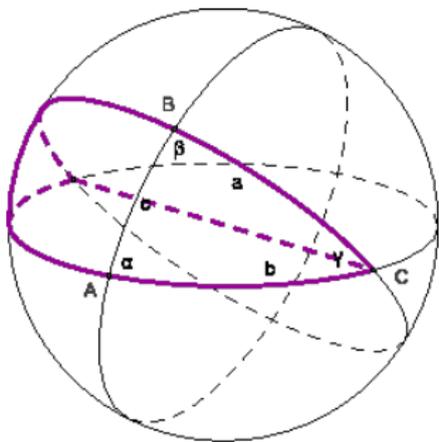
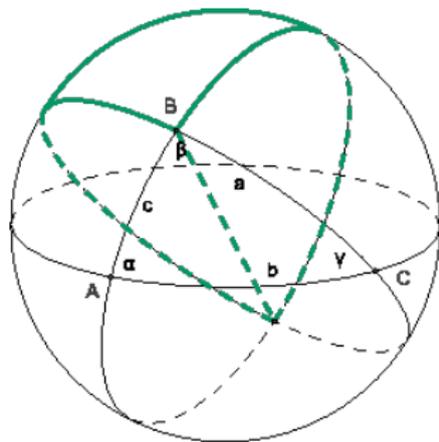
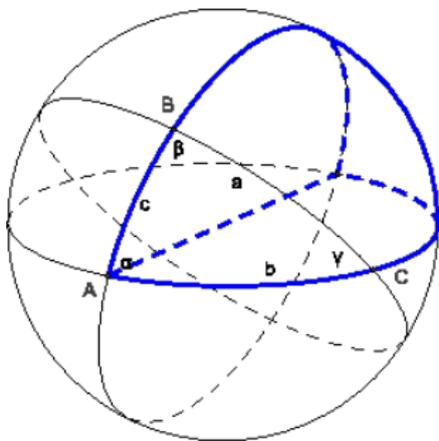
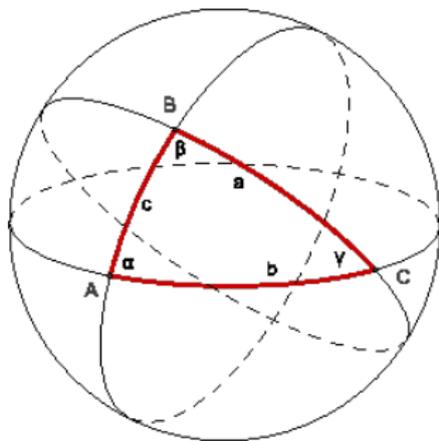
Par une règle de 3, on obtient :

$$(\text{Aire d'un fuseau d'angle } \alpha) = 4\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha.$$





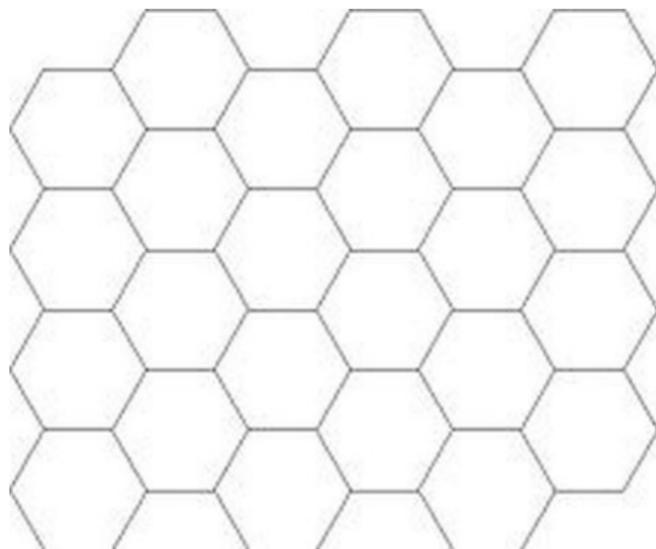
$$\text{Aire des 3 fuseaux} = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \frac{\text{Aire Sphère}}{2} + 2T = \frac{4\pi}{2} + 2T$$



$$\text{Aire des 3 fuseaux} = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \frac{\text{Aire Sphère}}{2} + 2T = \frac{4\pi}{2} + 2T$$

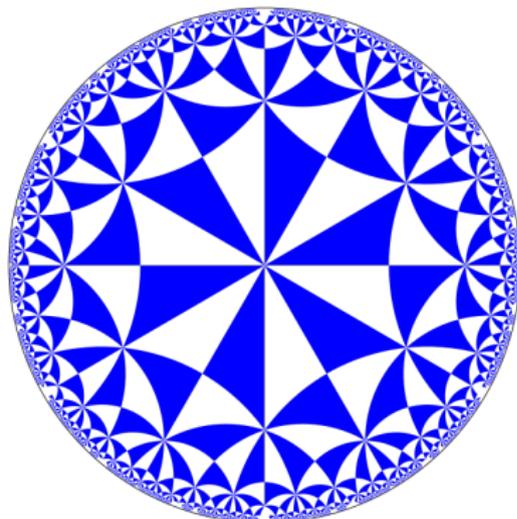
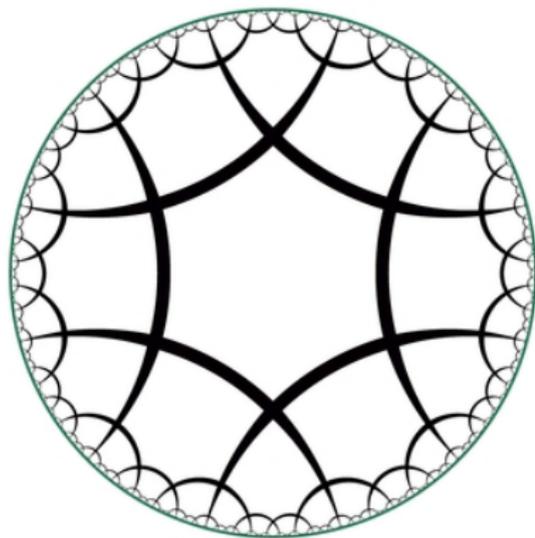
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + T$$

## Pavage du plan par des hexagones



# Pavage du disque par des hexagones

# Pavage du disque par des hexagones



# Indépendance de l'axiome d'Euclide

Impossibilité de prouver l'axiome d'Euclide à partir des autres car

- ▶ A l'intérieur de la géométrie euclidienne on a construit la géométrie non euclidienne.
- ▶ Vice-versa, à l'intérieur de la géométrie non euclidienne, on peut construire la géométrie euclidienne.

## Axiomes d'Hilbert (1890-1900)

Hilbert propose 8 définitions et 20 axiomes concernant le comportement des points, droites et plans.



# Axiomes d'Hilbert (1890-1900)

En voici quelques-uns.

- ▶ Il existe une droite liée à deux points donnés  $A$  et  $B$ , à laquelle appartiennent ces deux points.
- ▶ Il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points  $A$  et  $B$ .
- ▶ Sur une droite, il y a au moins 2 points ; il existe au moins 3 points non alignés.

Définition d'angle,...

- ▶ Axiome d'Euclide.
- ▶ Axiome d'archimède : Si  $AB$  et  $CD$  sont deux segments quelconques, il existe un nombre entier  $n$  tel que le report du segment  $CD$  répété  $n$  fois à partir de  $A$  sur la demi-droite déterminée par  $B$  conduit à un point situé au delà de  $B$ .

# Impact des géométries non euclidiennes

Les géométries non euclidiennes permettent d'**étudier les surfaces courbes** :

- ▶ la sphère ;
- ▶ le disque de Poincaré qui correspond à l'hyperboloïde.

**Physique relativiste** : la lumière prend des trajectoires courbes.  
Déformation de l'espace à proximité d'objets de grande masse  
(champ gravitationnel).



Yves, moine de Saint-Denis, Vie de saint Denis,  
France (Paris), 1317

## Cité idéale (renaissance italienne)



Bartolomeo Corradini, dit Fra Carnevale (? - 1484)



Francesco di Giorgio Martini (1439 - 1502)

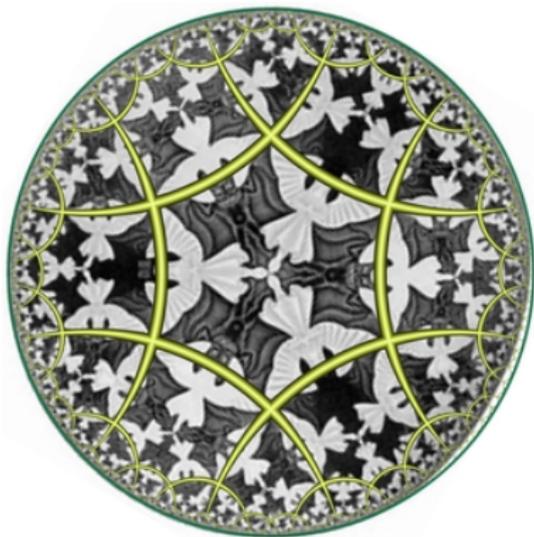
## Architecture contemporaine : Zaha Hadid (1950-2016)



Zaha Hadid Architects, Heydar Aliyev Center,  
Bakou (Azerbaïdjan).



M.C. Escher, Limite circulaire IV (Ciel et enfer), 1960, gravure sur bois en noir et taupe sur papier japon, Musée des beaux-arts du Canada, don de George Escher, Mahone Bay, Nouvelle-Écosse, 1983. © The M.C. Escher Company – Baarn, Pays-Bas, 2016.



# A voir et à lire

**Conférences d'Etienne Ghys**, sur YOUTUBE

*Et si le théorème de Pythagore n'était pas vrai ?*

## A lire

-  D. Hilbert, *Fondements de la géométrie* (traduction), Dunod, 1971.
-  J.M. Lee, *Axiomatic Geometry*, Pure and Applied Undergraduate Texts, 21. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
-  D. Perrin, *Les géométries non euclidiennes*, texte en ligne <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Romilly.pdf>.