Société Belge
des Professeurs
de Mathématique
d'expression française

Proclamation des lauréats de la 45^{e} Olympiade Mathématique Belge

Proclamation en ligne

10 octobre 2020

La cérémonie de proclamation des résultats de l'Olympiade Mathématique Belge prend traditionnellement ses quartiers dans l'un des centres universitaires de la Fédération Wallonie-Bruxelles. La SBPMef y voit une marque de soutien importante pour le travail inlassable de ses membres — tous bénévoles — au service de l'enseignement des mathématiques. Néanmoins, pour des raisons sanitaires, la proclamation sera cette année en ligne. Nous espérons vous revoir l'année prochaine pour une cérémonie « en vrai ».

SBPMef ... Renseignements pratiques

Siège administratif :	SBPMef Campus UMons, Bâtiment 4 Avenue Maistriau 19 7000 Mons
Secrétariat :	Cristina Carruana Tél/Fax : 065.37.33.04 Courriel : `sbpm@sbpm.be`
Compte financier :	IBAN BE26 0000 7280 1429 - BIC BPOTBEB1
Site Internet	`http://www.sbpm.be`
Site de l'OMB	`http://omb.sbpm.be/`

La SBPMef... vous connaissez ?

La mathématique est un des facteurs de l'essor économique, technique, scientifique et culturel des sociétés. Son implication croissante dans le développement de toutes les activités humaines, la place qu'elle prend par le truchement de l'informatique, en font un outil indispensable à la compréhension du monde.

La mathématique n'est pas seulement un outil au service des autres disciplines. Elle est aussi un art qui a sa vie propre et son histoire, avec les problèmes épistémologiques qu'elle suscite. Par là, elle a une valeur culturelle incontestable. D'où l'importance de l'objectif que s'est fixé la SBPMef.

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française est née en 1974 à la suite d'une restructuration linguistique de la Société Belge des Professeurs de Mathématique créée elle-même en 1953. Son but principal est de contribuer à la promotion et à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique.

Cette société s'est constituée en une a.s.b.l. qui tend à représenter l'ensemble des professeurs de mathématique de la partie francophone du pays. Elle rassemble en effet des enseignants de tous les réseaux (officiel, libre, communal et provincial) et de tous les niveaux d'enseignement (instituteurs, AESI, AESS, professeurs de Haute École ou d'Université).

Des inspecteurs, des conseillers pédagogiques et des chercheurs participent régulièrement à ses activités. Regroupant ainsi différentes forces de l'enseignement de la mathématique, la SBPMef peut s'affirmer comme un représentant privilégié des professeurs de mathématique auprès du (ou des) Ministère(s) qui ont en charge l'Éducation, la Recherche et la Formation dans notre Fédération Wallonie-Bruxelles ainsi qu'auprès de divers organismes concernés par l'enseignement des mathématiques. Elle peut ainsi promouvoir, et le cas échéant, défendre valablement sa conception d'un enseignement assurant une large place au développement des capacités créatrices des élèves.

Le nombre de membres de la SBPMef oscille autour de 600, tous professeurs de mathématique en Fédération Wallonie-Bruxelles. Son conseil d'administration comprend 24 membres élus qui se partagent l'organisation des activités principales de la société.

La SBPMef a participé à la création de la *Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs* (la CAPP) en Communauté française de Belgique. Elle tient également sa place au niveau de la Communauté mathématique internationale ; elle est membre fondateur de la *Fédération Européenne des Associations de Professeurs de Mathématiques* (la FEAPM) et de la récente Fédération francophone des associations pour l'enseignement des mathématiques (FFAEM). Elle est aussi membre du Comité international des Jeux mathématiques (CIJM).

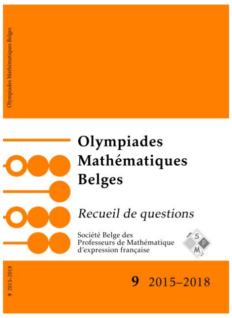
Épinglons un important travail de publication, certaines périodiques, d'autres plus ponctuelles, notamment des dossiers d'exploration didactique destinés à aider à la conception et à l'animation de l'enseignement de la mathématique.

La SBPMef organise également plusieurs compétitions de même que la participation de nos élèves aux olympiades internationales. L'organisation de l'Olympiade Mathématique pour environ 26000 étudiants en Communauté française (éliminatoires dans les établissements, demi-finales régionales et finale communautaire) ne serait possible sans la participation bénévole d'équipes régionales particulièrement dynamiques. Nos meilleurs étudiants participent à l'Olympiade Mathématique Internationale ainsi qu'à l'Olympiade du Benelux, mais également à l'EGMO pour les filles.

Enfin, la Société organise chaque année un Congrès qui se réunit trois jours fin août alternativement dans des locaux de l'un de nos trois principaux réseaux d'enseignement : conférences, exposés, ateliers et expositions sont au menu.

Depuis 2004, la Société facilite la participation de classes de l'enseignement fondamental et du premier degré au *Rallye Mathématique transalpin.*

Les brochures OMB



Les recueils des anciennes questions des Olympiades ont été régulièrement publiés par la SBPMef. Actuellement les brochures *Olympiades Mathématiques Belges – Tomes 6, 7 et 9*, collationnées par Pascal Dupont, Benoit Baudelet et Brigitte Bonnewyn sont disponibles. Elles reprennent toutes les questions posées lors des deux premières étapes des Olympiades Belges des années 2003 à 2010 et 2015 à 2018, ainsi que les questions des finales.

Que ce soit pour les miNi, les miDi ou les maXi, les questions ont été regroupées par matière et classées selon un ordre de difficulté croissante. On y trouve : Arithmétique et Algèbre, Géométrie, Logique, Analyse combinatoire et Probabilités et Problèmes divers.

La SBPMef vous invite à acquérir ces livres à la fois comme textes de référence pour une préparation à l'Olympiade elle-même, mais également comme recueils d'exercices non triviaux d'application des notions mathématiques enseignées dans les classes.

Les tomes 6 et 7 sont vendus au prix de 6 € (4 € pour les membres), le tome 9 est vendu au prix de 8 € (5 € pour les membres). Des réductions sont accordées pour l'achat de plusieurs tomes. L'ouvrage « Clés pour les olympiades » est également disponible.

Pour les frais de port ou pour les conditions particulières d'achat par quantité, consultez notre secrétaire Cristina au 065.37.33.04 ou par courrier électronique à l'adresse `sbpm@sbpm.be`.

L'Olympiade Mathématique Belge

C'est en 1976, à l'initiative du Professeur Buekenhout (ULB), que la SBPMef a créé une épreuve annuelle : l'Olympiade Mathématique Belge (OMB). Cette extraordinaire aventure s'est poursuivie grâce au formidable travail fourni par l'importante équipe de bénévoles qui gèrent cette compétition – tout à fait amicale – aussi bien sur le plan administratif que sur le plan scientifique, ainsi que grâce à l'enthousiasme des élèves participants et de leurs professeurs qui les incitent à s'inscrire et qui les motivent.

Elle est ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire francophone belge ou luxembourgeois (tous réseaux, tous niveaux). Dès 1977, elle se subdivise en deux catégories « Mini » et « Maxi » respectivement réservées aux élèves des trois classes inférieures et des trois classes supérieures. En 1996, une catégorie intermédiaire a été créée et désormais, l'Olympiade est subdivisée en trois catégories : « Mini », « Midi » et « Maxi », destinées respectivement aux élèves des 1er, 2e et 3e degrés de l'enseignement secondaire. Les participants trouvent ainsi dans le questionnaire qui leur est destiné une source de matières qui les ciblent au mieux.

Le jury national est composé de professeurs des enseignements secondaire, supérieur et universitaire ainsi que d'inspecteurs et de conseillers pédagogiques. Il a en charge la responsabilité générale de l'organisation de l'Olympiade et est secondé matériellement par le secrétariat de la SBPMef qui se charge des expéditions. Le jury a plus particulièrement la lourde charge de la création et de la rédaction précise des questions des diverses compétitions.

L'*éliminatoire* se déroule dans chaque école inscrite sous la responsabilité d'un professeur qui réceptionne, début janvier, les questionnaires ; il est chargé de la bonne organisation de l'éliminatoire au sein de son école. Le grand nombre d'inscrits impose de recourir à des questionnaires à choix multiples pour cette éliminatoire (actuellement, une réponse valable à trouver parmi cinq proposées). Le jury s'efforce néanmoins de donner aux questions un caractère « peu scolaire » de façon à obliger les élèves à faire preuve de leur capacité à appliquer leurs connaissances et à les transposer à des situations nouvelles. La durée de l'épreuve, 90 minutes pour répondre à 30 questions, les oblige à traiter d'abord les questions les plus accessibles. Afin d'éviter les choix au hasard, une réponse erronée à une question est pénalisée par rapport à une absence de réponse. De plus, le jury prévoit toujours que quelques questions ne soient pas à choix multiples, mais nécessitent une réponse qui est un nombre entier compris entre zéro et 999. Aidé de grilles de correction extrêmement précises, le professeur responsable organise dans son établissement la correction de cette première épreuve. Il envoie les résultats à son secrétaire régional. Il y a actuellement dix secrétaires régionaux (Arlon, Bruxelles, Charleroi, Liège, Louvain-La-Neuve, Luxembourg, Marche-en-Famenne, Mons, Namur et Tournai) qui ont en charge de lourdes responsabilités. Ce sont eux qui sélectionnent les demi-finalistes sur base des résultats communiqués par les écoles. Ils rédigent les statistiques année par année pour leur région et expédient ces données dans les écoles. Ils convoquent les demi-finalistes et organisent les demi-finales.

Les épreuves de la *demi-finale* sont du même type (la plupart des questions à choix multiples et quelques questions dont la réponse est un nombre entier compris entre 0 et 999) que lors des éliminatoires, mais les questions présentent un degré de difficulté légèrement supérieur. Enfin, les responsables régionaux et leurs équipes corrigent les épreuves et transmettent les résultats au secrétariat national. C'est ensuite au jury national qu'il appartient de déterminer quels seront les *finalistes*. Ceux-ci sont invités en un lieu central (en principe Namur) et travaillent pendant 4 heures à la résolution de problèmes difficiles. Il est conseillé aux finalistes de mettre par écrit toutes les démarches qu'ils entreprennent car le jury valorise les idées intéressantes, y compris celles dont il n'était pas évident *a priori* qu'elles n'aboutiraient pas. Le jury national corrige ces épreuves finales et choisit les lauréats. Si la compétition a ainsi successivement un caractère local, puis régional et enfin communautaire, tous les élèves sont néanmoins confrontés aux mêmes difficultés puisque toutes les questions sont préparées par le même jury national.

Depuis quelques années, tous les finalistes sont invités à la proclamation solennelle des résultats et y reçoivent un diplôme de participation ainsi que de nombreux prix. La SBPMef est à ce niveau aidée par les nombreux mécènes qui soutiennent la compétition. Des prix spéciaux sont en outre attribués aux élèves de 1$^{\text{re}}$, 3$^{\text{e}}$ et 5$^{\text{e}}$ années parvenus en finale et ayant fait montre d'un talent mathématique précoce et prometteur. Le prix Willy Vanhamme récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues.

Le but poursuivi par la SBPMef en organisant l'Olympiade est triple : intéresser les élèves à l'activité mathématique par le biais d'une compétition, d'un grand jeu qui les passionne ; mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation mathématique des élèves en proposant des problèmes qui font appel à la créativité, à l'imagination, aux capacités réelles de raisonnement ; fournir aux professeurs un choix d'exercices non élémentaires, originaux, d'un type différent de ceux figurant dans la plupart des manuels.

L'impact de l'Olympiade sur l'enseignement n'est pas négligeable. On constate en effet que nombre d'enseignants et d'auteurs de manuels réutilisent des questions posées à l'olympiade dans le cadre de leurs cours.

En 2020, les nombres de participation s'établissent comme suit :

	Éliminatoires	Demi-finales	Finale	Lauréats
Mini	12470	914	37	16
Midi	6772	586	40	11
Maxi	5851	606	40	13
Total	25093	2106	117	40

Commission Olympiade

Responsable national : Michel SEBILLE

Trésorier : Marc DE NEEF

Secrétariats régionaux :

Arlon :	Xavier HAINAUT
Bruxelles :	Vincent DE CLERCK
Charleroi :	Valérie BAS
Liège :	Yvan HAINE
Louvain-la-Neuve :	Jean-Pierre TURPIN
Luxembourg :	Mike DOSTERT
Marche-en-Famenne :	Sylvia PONTHIER
Mons :	Stéphanie BRIDOUX
Namur :	Pascal HENRY
Tournai :	Pierre DUFRASNE

Jury national :

Président du jury : Pascal DUPONT

Secrétaire du jury : Benoit BAUDELET

Rédactrice des questionnaires : Lise PONSELET

Membres du Jury : Benoit BAUDELET, Andrée BOGAERTS, Francis BUEKENHOUT, Sylvain COURTOIS, Vincent DALOZE,Géry DEBONGNIE, Brigitte DE CONINCK, Jean-Paul DOIGNON, Marc DE NEEF, Pascal DUPONT, Bernard FELTEN, Dimitri FOUCART,Nicolas FRANCO, Yvan HAINE, Lionelle LAMY, Jules MIÉWIS, Nicole MIÉWIS, Éveline MOITROUX, Philippe NIEDERKORN, Lise PONSELET, Michel SEBILLE, Pascal ZEIHEN

Membres correspondants : Martine DEVILLERS, Françoise DUCHÊNE-VALETTE, Pierre-Alain JACQMIN, Dany LEGRAND, Boris MEYNSBRUGHEN, Monique MILCAMPS-WILMET, Nicolas RADU, Yolande ROCH-NOËL et Simone TROMPLER

Olympiade Internationale (Belgique) : Gérald TROESSAERT assisté de Philippe NIEDERKORN (sélection et accompagnement) et Nicolas RADU

Olympiade Mathématique du Benelux : Nicolas RADU

European Girls' Mathematical Olympiad : Michel SEBILLE

Olympiades Internationales diverses (Grand-Duché de Luxembourg) : Mike DOSTERT, Bernard FELTEN, Pierre HAAS, Philippe SCHRAM et Pascal ZEIHEN

Collecte des lots et préparation de la proclamation : Jules MIÉWIS assisté de Cristina CARRUANA, Dominique DUMONT et Nicole MIÉWIS

Palmarès : Michel SEBILLE

Préparations aux olympiades internationales : Benoit BAUDELET, Corentin BODART, Hoan-Phung BUI, Cédric DE GROOTE, Pascal DUPONT, Nicolas FRANCO, Pierre-Alain JACQMIN, Savinien KRECZMAN, Joëlle LAMON, Benoît LEGAT, Jean-François MACQ, Philippe NIEDERKORN, Laure NINOVE, Cédric PILATTE, Nicolas RADU, Michel SEBILLE, Gérald TROESSAERT

Palmarès de la 45e OMB

Lauréats de la Mini-Olympiade 2020

A obtenu le premier prix

1	Robin Antoine	2	Institut de l'Enfant-Jésus	Nivelles

Ont obtenu un deuxième prix

2	Leroy Enya	2	Städtisches Gymn. St-Leonhard	Aachen
3	Chen Owen	2	Lycée Martin V	Louvain-la-Neuve
4	Guignard Thibaut	1	Centre scolaire Saint-Michel	Etterbeek

Ont obtenu un troisième prix

5	Zakine Akram	2	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
6	Dubois Mathieu	2	Lycée Français Jean Monnet	Uccle
7	Miller Oscar	2	C. S. Sainte-Véronique	Liège
8	Siklosi Peter	1	Collège Jean XXIII	Woluwe-Saint-Pierre

Ont obtenu un quatrième prix

9	Harding Gabriel-Francis	2	Athénée de Luxembourg	Luxembourg
	Josephy Cédric	2	Lycée Maria Assumpta	Bruxelles
11	Aldenhoff Adrien	2	Collège de la Providence	Herve
	De Veuster Clémence	2	Athénée Royal	Hannut
13	Bernabeu Adrian	2	École Européenne III	Ixelles
14	Deraemaeker Joseph	2	Lycée Mater Dei	Woluwe-Saint-Pierre
15	Capart Martin	2	Institut Saint-Joseph	Ciney
	Nuyts Samuel	1	École Européenne III	Ixelles

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élève de 1re année

Cullen Aoife	École Européenne III	Ixelles
Groenvald Emily	École Européenne III	Ixelles
Guignard Thibaut	Centre scolaire Saint-Michel	Etterbeek
Nuyts Samuel	École Européenne III	Ixelles
Pickart Loïc	Athénée de Luxembourg	Luxembourg
Siklosi Peter	Collège Jean XXIII	Woluwe-Saint-Pierre
Van Tuykom Lebrun Samuel	Collège Saint-Hubert	Watermael-Boitsfort

Ont également participé à la finale

Bodart Victor	1	Institut Notre-Dame	Bertrix
Delhez Estelle	2	Athénée Royal	Chénée
Didy Antoine	1	Collège Saint-Remacle	Stavelot
El Ahmadi Zayd	1	Institut du Sacré-Cœur	Koekelberg
Galluzzo Davide	1	Institut de la Sainte-Union	Dour
Jandrain Antoine	1	Collège Saint-Hadelin	Visé
Lahrouri Jawed	2	Athénée Royal	Bouillon
Laurant Célia	2	Institut Saint-Joseph	Carlsbourg
Linchant Tom	2	Institut de la Providence	Gosselies
Maurage Mathieu	2	Collège Saint-Stanislas	Mons
Roulent Liam	1	Centre Éducatif Saint-Pierre	Leuze-en-Hainaut
Struman Juliette	2	Institut Saint-François	Ouffet
Trarieux Honoré	2	École Européenne IV	Bruxelles
Trovato Etienne	2	Institut Saint-Michel	Verviers

Palmarès de la 45e OMB

Lauréats de la Midi-Olympiade 2020

A obtenu le premier prix

1	MUNOZ Mateo	4	Athénée Robert Catteau	Bruxelles

A obtenu un deuxième prix

2	COCHÉ Lucien	4	Comm. scolaire Sainte-Marie	Namur

Ont obtenu un troisième prix

3	VIERLINCK Robin	4	Collège Da Vinci	Perwez
4	KYSIL Angelina	4	Lycée de Garçons	Luxembourg
5	CAINE Rodolphe	4	Lycée Français Jean Monnet	Uccle

Ont obtenu un quatrième prix

6	LANGLOIS Benjamin	4	Collège Saint-Michel	Etterbeek
7	THIÉRY Rosalie	3	Lycée Martin V	Louvain-la-Neuve
8	LALOUX Camille	4	Petit Séminaire	Floreffe
	SARTENAER Henri	4	Collège Saint-Guibert	Gembloux
10	RENCELOT Maëlle	3	Collège Notre-Dame de B.E.	Estinnes

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élève de 3e année

RENCELOT Maëlle	Collège Notre-Dame de B.E.	Estinnes
THIÉRY Rosalie	Lycée Martin V	Louvain-la-Neuve

Ont également participé à la finale

BRAUCOURT Typhaine	3	École Européenne I	Luxembourg
BRUHL Margaux	3	Collège Saint-Remacle	Stavelot
DADI Elias	4	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
D'ANGELO Olivier	4	Athénée Royal Ch. Rogier	Liège
DÉOM Éthan	3	Athénée des Pagodes	Bruxelles
DUQUET Pierre	3	Athénée Royal J. Absil	Etterbeek
FADLALLAH Joanne	4	Collège Saint-Michel	Gosselies
FAULX Roman	4	Athénée Royal Air Pur	Seraing
FORIER Lena	4	Collège Saint-Augustin	Enghien
GALLAND Lila	4	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
GAUZES Florian	3	LF	
HANON OBSOMER Matteo	3	Collège Notre-Dame de la Tombe	Kain
JANSSENS Louis	3	Institut Saint-Boniface Parnasse	Ixelles
MICHELI David	4	Collège Saint-Louis	Liège
PIROT Antoine	4	Institut Saint-Joseph	Libramont
PIROT Théo	3	Institut Saint-Joseph	Carlsbourg
POIVRE Samuel	3	Collège Saint-Stanislas	Mons
PRINCEN Edouard	3	Collège du Sartay	Embourg
RILLI Ylenia	4	Lycée Hubert-Clément	Esch-sur-Alzette
ROBBERECHT Romain	3	Institut Saint-Boniface Parnasse	Ixelles
ROTH Pierre	4	Lycée Michel-Rodange	Luxembourg
SCHAACK Philippe	4	Lycée Classique	Echternach
SCHOR Ilya	4	École Decroly	Uccle
SHI Laetitia	4	Athénée de Luxembourg	Luxembourg
VONCKEN Michèle	3	Lycée Nic-Biever	Dudelange
ZULEWSKI Antoine	4	Institut Saint-Joseph	Chénée

Palmarès de la 45^e OMB

Lauréats de la Maxi-Olympiade 2020

A obtenu le premier prix

1	CORTILD Daniel	6	Collège Saint-Michel	Etterbeek

Ont obtenu un deuxième prix

2	DÜRRÜOGLU Emilhan	5	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud
	SMOLDERS Daniel	5	École Européenne II	Woluwe-St-Lambert
4	DETERME Marie	5	Institut Notre-Dame Séminaire	Bastogne

Ont obtenu un troisième prix

5	DUSART Quentin	5	Lycée Saint-Jacques	Liège
6	PIETTE Endymion	5	Collège St-Benoît St-Servais	Liège
7	SÎRBU Traian-Florin	5	Institut Saint-André	Ixelles

Ont obtenu un quatrième prix

8	FAYS Olivier	5	Institut Saint-Roch	Theux
9	DUBOIS Samuel	5	Collège d'Alzon	Bure
10	ROIZIN Anthony	6	International School	Luxembourg
11	KARAAHMET Ege	5	Lycée Michel-Lucius	Luxembourg
12	LE Vincent	5	Institut des S. de Notre-Dame	Anderlecht
13	THIELTGEN Alexis	5	Collège du Christ-Roi	Ottignies

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élève de 5e année

DETERME Marie	Institut Notre-Dame Séminaire	Bastogne
DUBOIS Samuel	Collège d'Alzon	Bure
DÜRRÜOGLU Emilhan	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud
DUSART Quentin	Lycée Saint-Jacques	Liège
FAYS Olivier	Institut Saint-Roch	Theux
KARAAHMET Ege	Lycée Michel-Lucius	Luxembourg
LE Vincent	Institut des S. de Notre-Dame	Anderlecht
PIETTE Endymion	Collège St-Benoît St-Servais	Liège
SÎRBU Traian-Florin	Institut Saint-André	Ixelles
SMOLDERS Daniel	École Européenne II	Woluwe-St-Lambert
THIELTGEN Alexis	Collège du Christ-Roi	Ottignies

Ont également participé à la finale

ADANT Axel	5	Athénée Royal Jules Bordet	Soignies
EGELS Laly	5	Collège Sainte-Marie	Saint-Ghislain
GICQUEL Clément	5	École Active	Uccle
JIANG Cathy	5	Athénée de Luxembourg	Luxembourg
JURCEVIC Max	5	Lycée Classique	Echternach
KETTENMEYER Yul	5	Lycée Classique	Diekirch
LEDERER Nathan	5	Collège du Christ-Roi	Ottignies
LEJEUNE Lucas	5	Institut Ste-Julie St-Laurent	Marche-en-Famenne
LEMAIRE Hadrien	5	Athénée Royal	Nivelles
MAKHLOUF Rebecca	5	Collège Don Bosco	Woluwe-St-Lambert
NIEBES Aurélien	6	Collège Saint-Vincent	Soignies
PETIT Antoine	5	Collège Saint Augustin	Gerpinnes
POTOCNÝ Adam	5	École Européenne III	Ixelles
VAN HEES Charles	5	Institut St-Boniface Parnasse	Ixelles

Prix Vanhamme 2020

Ce prix récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues.

Le lauréat est

Antoine ROBIN

élève de 2e année à l'Institut de l'Enfant-Jésus à Nivelles.
Il reçoit ce prix pour sa résolution de la question miNi 4.

Olympiade Mathématique Internationale

Bath au Royaume-Uni a accueilli du 11 au 22 juillet 2019 la 60e Olympiade Mathématique Internationale (OMI). Un total de 621 étudiants (dont 65 filles) issus de 112 pays ont participé à l'épreuve.

Comme c'est le cas depuis plusieurs années maintenant, l'équipe belge était composée de six étudiants (trois néerlandophones et trois francophones), sous la conduite de Bart WINDELS (leader) et de Philippe NIERDERKORN (deputy leader).

L'épreuve consiste en la résolution de six problèmes, chaque problème est coté sur sept points. Lorsque les corrections sont terminées, le jury de l'OMI définit les seuils d'attribution des médailles de la façon suivante : la moitié des participants au plus sont médaillés. Parmi les médaillés, un tiers au plus obtiennent une médaille d'argent et un sixième au plus une médaille d'or. Cette clé de répartition a donné les seuils suivants : médaille de bronze 17/42, médaille d'argent 24/42 et médaille d'or 31/42. De plus, une mention honorable est accordée à chaque concurrent non médaillé ayant obtenu le maximum à une question au moins. À Bath, 52 médailles d'or, 94 médailles d'argent, 156 médailles de bronze et 144 mentions honorables ont été décernées.

Voici les résultats des participants belges :

Tijs BUGGENHOUT (nl) : 27 points — médaille d'argent

Marie PEETERS (fr) : 17 points — médaille de bronze

Daniel Cortild (fr) : 11 points — mention honorable

Jonas De Schouwer (nl) : 10 points — mention honorable

Quentin Claus (fr) : 8 points — mention honorable

Louis Olyslager (nl) : 2 points

La tradition veut que l'épreuve comporte deux problèmes dits « faciles », deux problèmes de difficulté moyenne et deux problèmes difficiles pour départager les meilleurs. Cette année, le seuil des médailles de bronze était au score de 17. Il s'ensuit qu'il fallait résoudre l'équivalent de plus de deux questions complètes pour entrer dans les médaillés. Six participants originaires des USA, de Chine, de Pologne et de Corée obtiennent le score parfait de 42 points.

Bien que l'OMI soit une épreuve individuelle, il est inévitable de s'intéresser aux résultats globaux des différents pays. La Belgique se classe au 68^{e} rang (sur 112) d'un officieux classement inter-nations. Le trio de tête est composé à égalité des USA et de la Chine suivi à 1 point de la Corée du Sud.

En raison des circonstances qui ont postposé la finale, nous sommes en mesure de proclamer les résultats de deux OMI. La 61^{e} olympiade internationale prévue à Saint-Petersbourg en Russie, s'est déroulée virtuellement du 10 au 28 septembre 2020.

Voici les résultats des participants belges :

Jonas De Schouwer (nl) : 26 points — médaille d'argent

Amos Nicodemus (nl) : 20 points — médaille de bronze

Daniel Cortild (fr) : 19 points — médaille de bronze

Zhichang Chen (nl) : 15 points — médaille de bronze

Emilhan Dürrüoglu (fr) : 10 points — mention honorable

Olivier Fays (fr) : 9 points

La Belgique termine 34^{e} sur sur 105 pays participants.

Pour plus d'information : `http://www.imo-official.org`

European Girl's Mathematical Olympiad

La participation féminine aux olympiades internationales est faible voire pour certains pays quasiment inexistante. Il s'est ainsi récemment écoulé 16 années sans participation d'une Belge aux OMI jusqu'à ce qu'une participante néerlandophone prenne part aux éditions 2016 et 2020 et une francophone aux éditions 2017, 2018 et 2019.

Afin d'encourager une participation féminine à ces compétitions ainsi qu'à des études de mathématiques, il a été décidé d'organiser, à partir de 2012, une compétition réservée exclusivement aux filles. Celle-ci fut baptisée « European Girl's Mathematical Olympiad ».

Cette année, 204 participantes venant de 53 pays se sont affrontées (39 pays européens et 14 pays invités). La Belgique était représentée par Dora Chen, Camille Coppieters, Marie Determe, Camille Laloux (participantes), Michel Sebille (leader) et Wendy Goemans (deputy leader).

La compétition devait se dérouler à Egmont-aan-Zee aux Pays-Bas, mais les conditions sanitaires ont imposer d'organiser une édition en ligne.

Au niveau du résultat, la Belgique a fini trente-huitième sur cinquante-trois. Dora Chen est 91e, Marie Determe 113e, Camille Coppieters 172e et Camille Laloux 195e. Dora Chen obtient une médaille de bronze et Marie Determe a en outre obtenu une mention honorable. La compétition individuelle a été remportée par une participante roumaine réalisant un score de 39/42. La compétition par équipe est remportée par la Russie devant la Serbie et la Roumanie.

Les résultats et énoncés des problèmes sont disponibles sur le site `http://www.egmo.org`
La prochaine édition se déroulera à Kutaisi en Géorgie.

Olympiade Mathématique du Benelux

Depuis 2009 est organisée chaque année une olympiade de mathématiques du Benelux, plus connue sous l'acronyme anglais BxMO (Benelux Mathematical Olympiad). Comme la majorité des autres olympiades « régionales » organisées en Europe et ailleurs, elle a pour but de favoriser les contacts entre les pays participants, tout en offrant à quelques étudiants de chacun d'eux la possibilité d'acquérir, dans le cadre d'une compétition internationale, une expérience qui pourra se révéler précieuse pour une éventuelle participation à l'Olympiade Mathématique Internationale (OMI). L'épreuve proprement dite dure 4 h 30 et comporte quatre problèmes, notés chacun sur 7 points.

Le niveau de difficulté est plus élevé que celui des olympiades nationales des pays participants, mais le questionnaire reste plus abordable que celui d'une OMI. Chaque pays peut envoyer une délégation de 10 candidats et de 3 accompagnateurs.

L'édition 2020 prévue en Belgique a été organisée en ligne les 2 et 3 mai. La délégation belge était composée de cinq étudiants francophones (Tom Clara, Daniel Cortild, Marie Determe, Olivier Fays et Traian-Florin Sîrbu) et de cinq étudiants néerlandophones (Zhichang Chen, Jonas De Schouwer, Rutger Dobbelaere, Pieter Van Steenweghen et Brecht Verbeken) et de trois accompagnateurs : Tijs Buggenhout, Bart Michels et Corentin Bodart.

Les Pays-Bas ont obtenu la première place devant la Belgique, la Suède (invitée) et le Luxembourg. Nous avons décroché deux médailles d'or (Daniel Cortild et Jonas De Schouwer), une médaille d'argent (Zhichang Chen) et une médaille de bronze (Olivier Fays). Il est à noter que les médailles sont attribuées selon des critères identiques à ceux de l'OMI et que le meilleur score (27/28) a été réalisé par Jonas De Schouwer.

N'hésitez pas à consulter le site web `www.bxmo.org`. Vous y trouverez tous les classements, les questions et les solutions à tous les problèmes posés au cours de cette compétition enrichissante.

Conseil d'administration de la SBPMef

Conseil d'administration

Brigitte DE CONINCK, Jordan DETAILLE, Jean-Marc DESBONNEZ, Dominique DUMONT, Pascal DUPONT, Dimitri FOUCART, Renée GOSSEZ-KETELS, Marie-France GUISSARD, Valérie HENRY, Pauline LAMBRECHT, Dany LEGRAND, Christian MICHAUX, Jules MIÉWIS, Nicole MIÉWIS, Sarah ORY René SCRÈVE, Michel SEBILLE, Gérald TROESSAERT, Sébastien VERSPECHT.

Bureau exécutif de la Société

Présidente de la SBPMef :	Valérie HENRY
Vice-Présidents :	Michel SEBILLE
	René SCRÈVE
Administrateur délégué :	Christian MICHAUX
Secrétaire :	Marie-France GUISSARD
Trésorier :	Christian MICHAUX

Responsables d'activités

Rédacteur en chef de *Losanges* :	Valérie HENRY
Rédacteur de *SBPM-Infor* :	Renée GOSSEZ-KETELS
Responsable du site internet :	Sébastien VERSPECHT
Responsable Olympiade Nationale :	Michel SEBILLE
Responsables Olympiade Internationale :	Gérald TROESSAERT, Philippe NIEDERKORN et Nicolas RADU
Responsables Olympiade du Benelux :	Nicolas RADU
Responsables European Girl's Mathematical Olympiad :	Michel SEBILLE
Responsable Rallye Mathématique Transalpin :	Pauline LAMBRECHT
Présidentes de la Commission Congrès :	Nicole MIÉWIS et Dominique DUMONT
Représentants de la SBPMef à la CAPP :	René SCRÈVE
Représentante de la SBPMef au CIJM :	Joëlle LAMON

Questions de la finale Mini 2020

Question 1

Des jardiniers ont marqué 1000 *emplacements alignés le long d'une rivière (d'un seul côté), pour y replanter* 900 *noisetiers et* 100 *saules. Les noisetiers doivent être groupés en* 2 *blocs de* 450 *séparés par au moins* 1 *saule. Quel est le nombre de dispositions des noisetiers, en supposant qu'il est impossible de les distinguer les uns des autres ? Précision : une disposition des noisetiers est un choix de* 900 *emplacements parmi les* 1000 *emplacements marqués.*

Solution inspirée de celle d'Adrian Bernabeu

Les noisetiers étant répartis selon deux blocs de 450, ce ne sont que ces blocs qui bougent selon la position des saules.

On a donc 3 blocs de saules ; 2 aux extrémités de a et c arbres et un au milieu constitué de b arbres.

Le nombre b de saules varie entre 1 et 100 ; il y a donc 100 possibilités. Le nombre de saules à chaque extrémité varie entre 0 et 99.

On peut déterminer le nombre de combinaisons dans les extrémités à partir de b puisque $a + b + c = 100$.

- Si $b = 1$, a et c se situent entre 0 et 99 ce qui donne 100 possibilités.
- Si $b = 2$, a et c se situent entre 0 et 98 ce qui donne 99 possibilités.
- Si $b = 3$, a et c se situent entre 0 et 97 ce qui donne 98 possibilités.

  ⋮
- Si $b = 100$, a et c sont égaux à 0 ce qui donne 1 possibilité.

Le nombre de combinaisons recherché vaut donc

$$100 + 99 + 98 + \cdots + 2 + 1 = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Question 2

Si n est un nombre naturel non nul, $n!$ est une abréviation pour $n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$. Par exemple, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Quel est le plus petit nombre naturel non nul dont le produit par $12!$ est un carré parfait ?

Solution inspirée de celle de Adrian Bernabeu

Le nombre de fois que chaque facteur premier apparaît dans la décomposition en facteurs premiers d'un carré supérieur ou égal à 2 doit être pair. À part 0 et 1 qui sont des carrés, le carré d'un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 s'écrit toujours sous la forme $p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_n^{2\alpha_n}$ où $p_1, p_2, ..., p_n$ sont des nombres premiers et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des nombres entiers naturels non nuls. Ainsi par exemple $324 = 18^2 = (2 \cdot 3^2)^2 = 2^2 \cdot 3^4 = 2^{2 \cdot 1} \cdot 3^{2 \cdot 2}$.
La décomposition en facteurs premiers de $12!$ est :

$$\begin{aligned} 12! &= 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \end{aligned}$$

Or seuls les exposants de 3, 7 et 11 ne sont pas pairs. Le plus petit entier naturel par lequel on doit donc multiplier $12!$ pour obtenir un carré parfait est donc $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$. Et $12! \cdot 231$ est bien un carré parfait car :

$$12! \cdot 231 = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = (2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11)^2$$

Question 3

Les touches de ma calculatrice permettent d'introduire seulement des nombres naturels, des parenthèses et des points-virgules. À un triplet de nombres $(x\,;y\,;z)$*, dès la fermeture de la parenthèse, elle affiche le résultat* $\dfrac{z}{x-y}$ *si* x *est différent de* y*. Dans le cas où* $x = y$*, elle affiche* 0*.*

a) Ainsi $(2\,;0\,;1)$ *donne* $\dfrac{1}{2}$*. Que donnent* $(0\,;2\,;1)$*,* $(1\,;2\,;0)$ *et* $(a\,;0\,;1)$*, si* a *est un nombre naturel non nul ?*

b) Un terme d'un triplet peut être un autre triplet. Ma calculatrice respecte l'ordre de priorité des parenthèses. Que donne $((29\,;9\,;2020)\,;(33\,;11\,;2200)\,;2020)$ *?*

c) Pour les nombres naturels non nuls a *et* b*, proposer une expression à introduire dans ma calculatrice pour obtenir le quotient* $\dfrac{a}{b}$*. Et une expression pour obtenir le produit* $a \times b$*.*

Solution inspirée de celle de Antoine Robin

a) $(0;2;1)$ donne $-\frac{1}{2}$; $(1;2;0)$ donne 0 ; $(a;0;1)$ donne $\frac{1}{a}$.

b) $((29;9;2\,020);(33;11;2\,200);2\,020)$ donne $\frac{202}{\frac{2\,020}{29-9}-\frac{2\,200}{33-11}} = \frac{2\,020}{101-100} = 2\,020$.

c) Pour obtenir le quotient $\frac{a}{b}$, on peut introduire $(b;0;a)$ à la calculatrice.
Pour obtenir le produit $a \times b$, on peut introduire $((a;0;1);0;b)$ qui donne $\frac{b}{\frac{1}{a-0}-0} = a \times b$.

Question 4

Les nombres 1, 2, 3 et 4 sont placés aux quatre sommets d'un carré. Sur la figure ci-contre, la somme des valeurs absolues des différences des deux nombres placés aux extrémités de chaque côté du carré vaut $|3-1|+|2-3|+|4-2|+|1-4| = 2+1+2+3 = 8$*. (Rappel : la valeur absolue d'un nombre vaut le nombre lui-même s'il est positif, et son opposé s'il est négatif.)*

$$\begin{array}{ccc} 4 & — & 2 \\ | & & | \\ 1 & — & 3 \end{array}$$

a) Si le nombre 1 reste en place, combien existe-t-il de placements des nombres 2, 3 et 4 sur les trois sommets restants ? Et quelle est la plus petite somme ainsi obtenue ?

b) Les nombres 1, 2, 3 et 4 sont remplacés par quatre nombres réels a*,* b*,* c *et* d *tels que* $a < b < c < d$*. Si le nombre* a *reste en place sur un sommet fixe du carré, combien de valeurs différentes prend la somme lorsque tous les placements de* b*,* c *et* d *sont considérés ? Quelle est la plus petite de ces valeurs ?*

Solution inspirée de celle d'Adrien Aldenhoff

1. Si le nombre 1 reste en place, il existe 6 placements différents des nombres 2, 3, 4. Les voici :

2		3	2		4	3		2	3		4	4		2	4		3
	a			b			c			d			e			f	
1		4	1		3	1		4	1		2	1		3	1		2

Il est impossible de trouver d'autres placements que ceux-ci. Si l'on place d'abord le 2 en haut à gauche, alors il ne reste que deux possibilités pour placer le 3 et le 4 : soit le 3 en haut et le 4 en bas (obtenu en a), soit le 4 en haut et le 3 en bas (obtenu en b). De même, si on place d'abord le 3 en haut à gauche, on obtient les deux possibilités c et d, et si on place d'abord le 4 en haut à gauche, on obtient les deux possibilités e et f.

Si on inscrit les différences entre les nombres le long des côtés, puis on calcule les sommes, on obtient :

2	1	3	2	2	4	3	1	2	3	1	4	4	2	2	4	1	3
1	a	1	1	b	1	2	c	2	2	d	2	3	e	1	3	f	1
1	3	4	1	2	3	1	3	4	1	1	2	1	2	3	1	1	2
	6			6			8			6			8			6	

La plus petite valeur est donc 6.

2. De la même manière, si le nombre a reste en place, il existe 6 placement différents des nombres b, c, d. Les voici :

b		c	b		d	c		b	c		d	d		b	d		c
	a			b			c			d			e			f	
a		d	a		c	a		d	a		b	a		c	a		b

Si on calcule les sommes, on obtient :

a : $b-a+c-b+d-c+d-a=-2a+2d$
b : $b-a+d-b+d-c+c-a=-2a+2d$
c : $c-a+c-b+d-b+d-a=-2a-2b+2c+2d$
d : $c-a+d-c+d-b+b-a=-2a+2d$
e : $d-a+d-b+c-b+c-a=-2a-2b+2c+2d$
f : $d-a+d-c+c-b+b-a=-2a+2d$

Il n'y a que 2 valeurs différentes : $-2a+2d$ et $-2a-2b+2c+2d$.

Pour trouver la plus petite de ces valeurs, il suffit de constater que :

— dans la somme $-2a+2d$, on soustrait le double de la plus petite valeur du double de la plus grande ;

— dans la somme $-2a-2b+2c+2d$, on soustrait aussi le double de la plus petite valeur du double de la plus grande, mais on y ajoute la différence entre le double de la deuxième plus grande valeur et le double de la deuxième plus petite : le résultat obtenu doit donc être plus petit.

La valeur la plus petite est donc $-2a+2d$.

Question 5

Une association organise sa vente annuelle de livres, qui dure 5 jours. Le 1er jour elle vend la moitié de son stock de livres, le 2e jour elle vend 1/3 de ce qui reste, le 3e jour 1/4 de ce qui reste, le 4e jour 1/5 de ce qui reste et le 5e jour 1/6 de ce qui reste. Les invendus sont conservés pour l'année suivante.

a) Si le stock de départ est de 120 livres, combien y a-t-il d'invendus ?

b) Y a-t-il d'autres nombres de livres au départ, non nuls, pour lesquels l'énoncé est réalisable (sans fractionner de livre) ?

c) Si l'association prolonge la vente, et vend le 6e jour 1/7 de ce qui reste puis le 7e jour 1/8 de ce qui reste, quel est le plus petit nombre de livres au départ, non nul, pour lequel cet énoncé est réalisable ?

Solution inspirée de celles de Cédric Joséphy et Antoine Robin

a) Procédons par étapes :
— le 1er jour, l'association en vend : $120 \times \frac{1}{2} = 60$, il en reste 60 ;
— le 2e jour, l'association en vend : $60 \times \frac{1}{3} = 20$, il en reste 40 ;
— le 3e jour, l'association en vend : $40 \times \frac{1}{4} = 10$, il en reste 30 ;
— le 4e jour, l'association en vend : $30 \times \frac{1}{5} = 6$, il en reste 24 ;
— le 5e jour, l'association en vend : $24 \times \frac{1}{6} = 4$; il en reste 20.

b) Si x est le nombre de livres au départ, on observe qu'il en restera
— $\frac{x}{2}$ après le premier jour ;
— $\frac{x}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{x}{3}$ après le deuxième jour ;
— $\frac{x}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{x}{4}$ après le troisième jour ;
— $\frac{x}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{x}{5}$ après le quatrième jour ;
— $\frac{x}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{x}{6}$ après le cinquième jour.

Comme le nombre de livres restants chaque jour doit être un nombre entier, il faut que x soit un multiple de 2, 3, 4, 5 et 6. Le plus petit x est le PPCM de 2, 3, 4, 5 et 6 soit 60. Toutes les possibilités sont donc tous les multiples naturels de 60.

c) En observant le raisonnement tenu en b), on en déduit qu'il faut cette fois trouver le PPCM de 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 qui est 840.

Questions de la finale Midi 2020

Question 1

Prouver le critère de divisibilité par 7 que voici : un nombre est divisible par 7 si et seulement si la somme du nombre privé de son dernier chiffre avec le quintuple du dernier chiffre est divisible par 7. Rappel : le quintuple d'un nombre est ce nombre multiplié par 5.

Solution inspirée de celle de Henri Sartenaer

Soit x un nombre naturel et y son dernier chiffre. La somme du nombre dont on a enlevé le dernier chiffre et du quintuple de ce dernier chiffre est notée a.
On a donc

$$a = \frac{x-y}{10} + 5y$$

et nous devons démontrer que x est divisible par 7 ssi a est divisible par 7. Dès lors

$$x - y + 50y = 10a \Leftrightarrow x = 49y + 10a \Leftrightarrow x = 7 \cdot 7y + 10a$$

Deux cas se présentent.

- Si a est divisible par 7, $\dfrac{a}{7}$ est un entier. Par conséquent,

$$x = 7 \cdot \left(7y + 10\frac{a}{7}\right)$$

  est un entier multiple de 7.
- Si a n'est pas divisible par 7 : on a

$$\frac{x}{7} = 7y + 10\frac{a}{7}.$$

  Comme $\dfrac{a}{7}$ n'est pas entier, $10\,\dfrac{a}{7}$ n'est pas entier et x n'est pas divisible par 7. Par contraposition, si x est divisible par 7, a est divisible par 7.

Question 2

Véra et Blaise jouent au jeu suivant sur un cube. Véra peint une arête en vert, puis Blaise peint une autre arête en bleu. Ensuite, Véra peint en vert une arête non encore peinte, puis Blaise peint en bleu une arête non encore peinte. Ils recommencent ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les arêtes soient peintes. À la fin, Véra compte le nombre de sommets qui sont une extrémité d'au moins une arête verte. Véra souhaite maximiser ce nombre de sommets. La plus grande valeur de ce nombre que Véra est certaine d'obtenir en jouant bien vaut-elle :

a) *Au moins* 6 *?*

b) *Au moins* 7 *?*

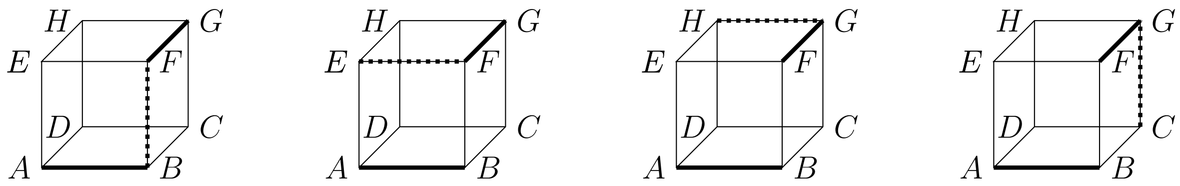
c) 8 *?*

Solution inspirée de celles de Rodolphe Caine, Mateo Munoz et Robin Vierlinck

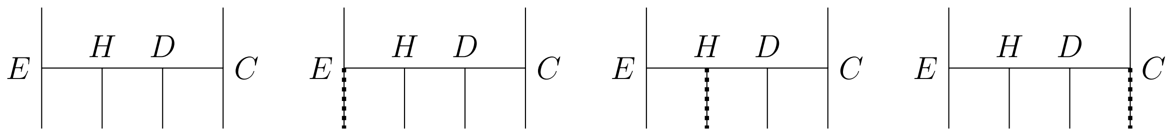
a) Oui. Il y a 12 arêtes sur le cube, donc Véra en coloriera 6 et Blaise 6 également. Chaque sommet du cube est l'extrémité de 3 arêtes. Pour empêcher Véra d'obtenir un sommet s, Blaise doit colorier les 3 arêtes contenant s. Ainsi avec ses 6 arêtes, Blaise ne pourra préserver qu'au plus 2 sommets. En d'autres termes, de quelque manière qu'elle joue (même au hasard), Véra est certaine d'obtenir au moins 6 sommets.

b) Oui. Véra peint une première arête v_1. Deux autres arêtes sont à la fois parallèles à v_1 et situées dans une même face que v_1. Lors de son premier coup, Blaise ne peut peindre qu'au plus une de ces deux arêtes. Ainsi Véra peut toujours à son deuxième coup peindre une de ces deux arêtes, appelons v_2 l'arête que Véra peint. Elle aura alors couvert les quatre sommets de la face contenant v_1 et v_2. Après que Blaise a peint sa deuxième arête, il reste dans la face opposée à celle de v_1 et v_2 au moins deux arêtes non encore peintes. En peignant une telle arête, Véra aura déjà couvert 6 sommets ; soit X et Y les deux derniers sommets. Après que Blaise a peint ses trois premières arêtes, il y a encore au moins une des six arêtes contenant X ou Y qui n'est pas peinte (car aucune des trois arêtes vertes ne contient X ou Y). En coloriant une telle arête, Véra obtiendra un septième sommet.

c) Oui. Appelons A, B, ..., H les 8 sommets du cube. Il n'est pas restrictif de supposer que la première arête colorée par Véra est $[A, B]$. Sur la figure, les arêtes peintes en vert par Véra sont marquées par des traits épais et continus, celles que Blaise peint en bleu par des traits en pointillés. Il y a, à isométrie près du cube, quatre cas pour la première arête coloriée par Blaise. Les voici, avec en plus le choix que fait Véra pour sa seconde arête (en fait toujours la même arête $[F, G]$ car on a sélectionné les quatre cas représentatifs dans cet objectif).



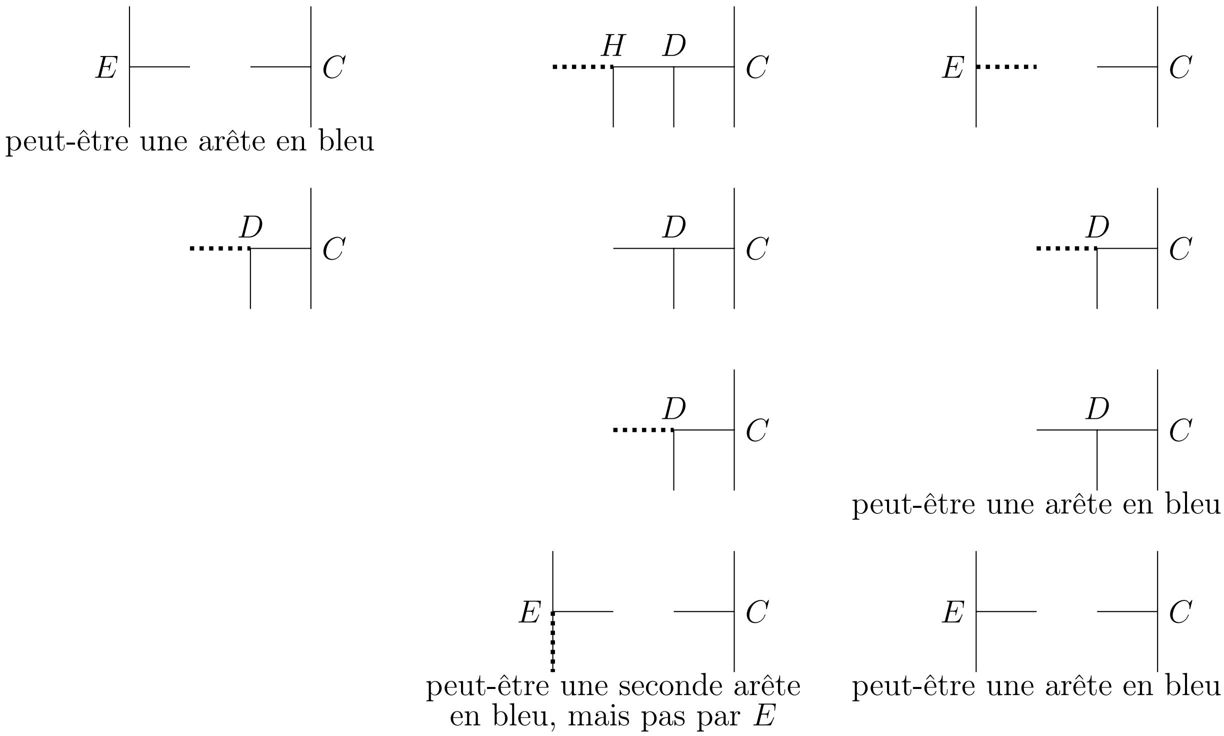
Le dessin suivant montre, dans chacun des quatre cas, les sommets non couverts par les deux premières arêtes vertes de Véra, les arêtes qui contiennent ces sommets et en pointillés la seule arête qui a été coloriée par Blaise à ce moment.



Le quatrième cas, qui est semblable au second, sera ignoré dans la suite. Ensuite Blaise joue son deuxième coup, coloriant en bleu éventuellement une de plus des 9 arêtes dessinées. Il reste à montrer que Véra arrivera à couvrir les quatre sommets étiquetés en appliquant les règles suivantes :

Si la deuxième arête bleue touche la première en un sommet étiqueté, Véra met en vert la troisième arête par ce sommet. S'il n'y a pas de tel sommet, elle colorie une arête qui joint deux sommets étiquetés dont chacun est sur une arête bleue et aucune arête verte. S'il n'y a pas de telle arête et si Blaise n'a pas colorié $[D, H]$, Véra le fait. Enfin, dans les cas restants Véra colorie $[E, H]$ ou si cette arête est déjà peinte, une autre arête au hasard.

Voici dans chacune des trois colonnes les différents sous-cas résultant du deuxième coup de Blaise et de la réponse de Véra (sans répétition de sous-cas semblables dans une colonne et avec étiquetés seulement les sommets non encore couverts par Véra).



Notons qu'il ne reste en fait que 6 cas distincts. C'est à présent à Blaise de colorier sa troisième arête. Véra répondra en appliquant à nouveau les règles énoncées ci-dessus. Une étude assez simple dans chacun des six cas montre que Véra arrivera toujours à couvrir les 8 sommets.

Remarque. La réponse au point c) rend celles aux points a) et b) superflues.

Question 3

La somme de deux fractions irréductibles donne souvent une fraction dont le dénominateur est strictement inférieur au plus petit commun multiple (ppcm) des dénominateurs des deux fractions de départ. Par exemple, $\frac{2}{15}+\frac{7}{10}=\frac{5}{6}$. *Soit les fractions irréductibles* $\frac{a}{35}$ *et* $\frac{b}{42}$, *strictement comprises entre* 0 *et* 1.

a) Si $a=1$, *donner la plus petite et la plus grande valeur de* b *pour lesquelles la somme de ces deux fractions soit une fraction dont le dénominateur est strictement inférieur au ppcm de* 35 *et* 42.

b) Déterminer a *et* b *pour que la somme de ces deux fractions soit maximale, avec la même propriété.*

Solution inspirée de celles de Camille Laloux et Olivier D'Angelo

Les fractions $\frac{a}{35}$ et $\frac{b}{42}$ sont irréductibles et comprises strictement entre 0 et 1. Donc $0 < a < 35$ avec $a \notin 5\mathbb{N}$ ou $7\mathbb{N}$ et $0 < b < 42$ avec $b \notin 2\mathbb{N}$, $3\mathbb{N}$ ou $7\mathbb{N}$ [1]

a) Puisque $a = 1$, la somme devient :

$$\frac{1}{35} + \frac{b}{42} = \frac{6+5b}{210}.$$

Pour que cette fraction soit simplifiable il faut que $6+5b$ soit divisible par un au moins des diviseurs premiers de 210 c.-à-d. 2, 3, 5 ou 7. Or $6+5b$ n'est jamais divisible ni par 2, ni 3, ni 5. En effet,
— pour que $6+5b = 2n \iff 5b = 2(n-3)$, il faut que b soit un multiple de 2 ;
— pour que $6+5b = 3n \iff 5b = 3(n-2)$, il faut que b soit un multiple de 3 ;
— puisque $6+5b = 1+5(1+b)$ il n'est jamais divisible par 5.
Il faut donc que $6+5b = 7n$.

Vu que b est impair, $5b$ se terminera toujours par 5 et $6+5b$ se terminera toujours par 1. Les valeurs de possibles pour n sont donc de la forme $10j+3$. Mais,

$$6+5b = 7(10j+3) \iff 5b = 70j+15 \iff b = 14j+3.$$

La plus petite valeur permise pour b est 17 et on a bien : $\frac{1}{35} + \frac{17}{42} = \frac{91}{210} = \frac{13}{30}$. La valeur suivante qui est aussi la plus grande est 31 et on a bien : $\frac{1}{35} + \frac{31}{42} = \frac{161}{210} = \frac{23}{30}$.

b) Transformons la somme :

$$\frac{a}{35} + \frac{b}{42} = \frac{6a+5b}{210}.$$

Par un raisonnement semblable à celui ci-dessus, $6a+5b$ ne peut être un multiple de 2, 3 ou 5 et doit donc être un multiple de 7. D'autre part, on veut que la somme soit maximale. La plus grande valeur que peut prendre $6a+5b$ est $6a_{max} + 5b_{max} = 6\cdot 34 + 5\cdot 41 = 409$, mais ce n'est pas un multiple de 7 La plus grande valeur de $6a+5b$ multiple de 7 mais non de 2, 3 ou 5 et inférieure à 409 est 371. Cherchons a et b tels que $6a+5b = 371$ Essayons avec le plus grand $b = 41$.

$$6a + 5.41 = 371 \iff a \text{ non entier}$$

Si $b = 37$,

$$6a + 5.37 = 371 \iff a = 31.$$

Montrons que si $b \leqslant 31$, aucune valeur de a acceptable ne donnera une somme de 371. En effet, pour tout a, tout $b \leqslant 31$, on a $6a + 5b \leqslant 6a + 155 \leqslant 6a_{max} + 155 = 6 \cdot 34 + 155 = 359$. Les valeurs $a = 31$ et $b = 37$ forment donc bien l'unique couple demandé avec

$$\frac{31}{35} + \frac{37}{42} = \frac{371}{210} = \frac{53}{30}.$$

1. $k\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de k

Question 4

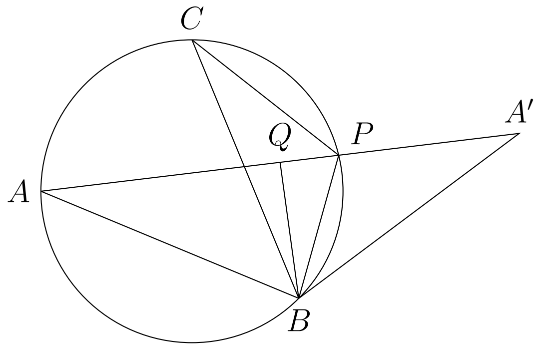
Sur un cercle, les points A, B, P, C sont placés dans cet ordre, avec A différent de C et $|AB| = |BC|$. Le point Q est le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur AP.

a) Soit A' le symétrique de A par rapport à Q. Prouver que $\widehat{BA'P} = \widehat{BCP}$.

b) L'angle $\widehat{BPC}$ est-il aigu ou obtus ? Et l'angle $\widehat{BPA'}$?

c) Prouver que $|AQ| = |PC| + |PQ|$.

Solution inspirée de celles de Mateo Munoz, Angelina Kysil et Lucien Coché



a) Les triangles rectangles BQA et BQA' sont isométriques car BQ est un côté commun et $|AQ| = |A'Q|$ par définition de A'. Les points A, Q et P étant alignés, on a $|\widehat{BA'P}| = |\widehat{BAP}|$. Les angles inscrits $\widehat{BAP}$ et $\widehat{BCP}$ ont même amplitude puisque interceptant le même arc $\widehat{BP}$. Par transitivité de l'égalité, $|\widehat{BA'P}| = |\widehat{BCP}|$.

b-1) Puisque $|AB| = |BC|$, le triangle ABC est isocèle et donc ses angles à la base sont aigus ; ainsi en est-il de $\widehat{BAC}$. Dans un quadrilatère inscrit — ce qui est le cas de $ABPC$ — les amplitudes des angles opposés ont une somme égale à 180°. Ainsi $\widehat{BPC}$ est un angle obtus.

b-2) Dans le triangle rectangle BQP, l'angle $\widehat{BQP}$ est aigu. Son supplémentaire $\widehat{BPA'}$ est donc obtus.

c) On sait déjà que les triangles BQA et BQA' sont isométriques, ainsi $|BA| = |BA'|$. Et puisque $|BA| = |BC|$ par hypothèse, la transitivité de l'égalité montre que $|BA'| = |BC|$. Les triangles BPA' et BPC sont isométriques car PB est commun, $|BA'| = |BC|$ et $|\widehat{BA'P}| = |\widehat{BCP}|$ (c'est le résultat a)), d'où l'on déduit que $|A'P| = |PC|$. Donc $|AQ| = |A'Q| = |A'P| + |PQ| = |PC| + |PQ|$.

Questions de la finale Maxi 2020

Question 1

Le banquet annuel du Syndicat Breton des Pêcheurs de Moules en eaux froides *a réuni cette année 2020 participants. Le gâteau qui en constituait le dessert a été partagé et distribué (par ordre d'âge décroissant) de la manière suivante :*

- *le* 1^er^ *a reçu 1/2020 du gâteau ;*
- *le* 2^e^ *a reçu 2/2020 du reste ;*
- *le* 3^e^ *a reçu 3/2020 du reste ;*
- ...
- *le* 2019^e^ *a reçu 2019/2020 du reste ;*
- *le* 2020^e^ *a reçu tout le reste.*

Qui a reçu la plus grosse part ?

Solution inspirée de celle de Quentin DUSART

Pour tout $n \in \{1, 2, ..., 2020\}$ notons r_n la fraction du gâteau qui reste lorsque le n^{e} participant va prendre sa part et p_n la fraction du gâteau du n^{e} participant.
Notons que pour tout $n \in \{1, 2, ..., 2020\}$, $r_n \neq 0$, $p_n \neq 0$, $r_1 = 1$ et $p_1 = \frac{1}{2020}$.
Pour tout $n \in \{1, 2, ..., 2019\}$,

$$p_n = \frac{n}{2020} r_n \Rightarrow r_{n+1} = r_n - p_n = r_n - \frac{n}{2020} r_n = \frac{(2020 - n)}{2020} r_n$$

et

$$p_{n+1} = \frac{n+1}{2020} r_{n+1} = \frac{(n+1)}{2020} \frac{(2020-n)}{2020} r_n.$$

Comme tous les termes des suites (r_n) et (p_n) sont strictement positifs, on va comparer le quotient $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ à 1 pour étudier sa variation.
On a :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{(n+1)}{2020} \frac{(2020-n)}{2020} r_n}{\frac{n}{2020} r_n} = \frac{(n+1)(2020-n)}{2020n}$$

et

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1 \Leftrightarrow \frac{(n+1)(2020-n)}{2020n} > 1 \Leftrightarrow n(n+1) < 2020$$

Comme la fonction $f(n) = n(n+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, que $44 \cdot 45 = 1980$ et $45 \cdot 46 = 2070$, (p_n) est strictement croissante pour $n \in \{1, 2, ..., 45\}$ et strictement décroissante pour $n \in \{45, 46, ..., 2020\}$. Le 45^e^ participant a donc reçu la plus grande part.

Question 2

Le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ admet trois racines réelles α, β et γ. Que vaut $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$?

Solution inspirée de celle de Daniel Cortild

Comme P admet trois racines réelles α, β et γ, on a

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

En développant, il vient

$$x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)x - \alpha\beta\gamma = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 2 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = -3 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$$

En développant $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = 2^3 = 8$, il vient

$$\begin{aligned} 8 &= (\alpha+\beta+\gamma)^3 \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha^2\gamma+3\alpha\beta^2+3\beta^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta\gamma^2 \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)-3\alpha\beta\gamma \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\cdot 2\cdot(-3)-3\cdot(-1) \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-18+3 \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-15 \end{aligned}$$

Finalement $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 8+15 = 23$.

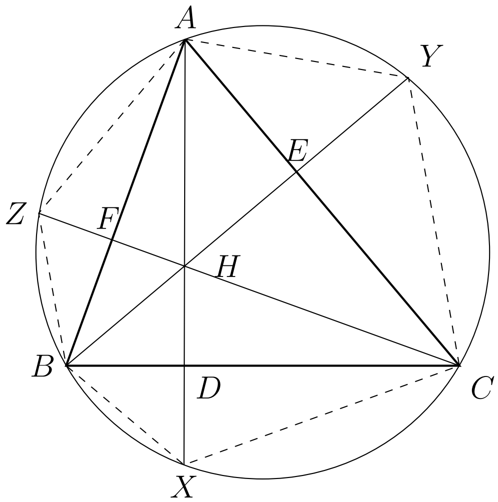
Question 3

Le triangle ABC a trois angles aigus. Ses hauteurs $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ sont prolongées pour rencontrer le cercle circonscrit au triangle ABC, respectivement en X, Y et Z. Que vaut $\dfrac{|AX|}{|AD|} + \dfrac{|BY|}{|BE|} + \dfrac{|CZ|}{|CF|}$:

a) Si le triangle ABC est équilatéral ?

b) Si le triangle ABC a trois angles aigus quelconques ?

Solution inspirée de celle de Daniel Smolders



Soit H l'orthocentre du triangle ABC. On a :

$$\begin{array}{rcll} |\widehat{BCX}| & = & |\widehat{BAX}| & \text{angles inscrits interceptant le même arc} \\ & = & 90° - |\widehat{ABD}| & \text{dans le triangle rectangle } ABD \\ & = & 90° - |\widehat{CHD}| & \text{car les triangles } CFB \text{ et } CDH \text{ sont semblables} \\ & = & |\widehat{BCH}| & \text{dans le triangle rectangle } CDH \end{array}$$

On trouve de même que $|\widehat{CBX}| = |\widehat{CBH}|$.

On peut donc conclure que les triangles BCX et BCH sont isométriques.

De la même façon, les triangles ABZ et ABH sont isométriques, ainsi que ACY et ACH.

De plus, $|DX| = |DH|$, car ce sont les hauteurs issues de X et H dans les triangles BCX et BCH. De même, $|FZ| = |FH|$ et $|EY| = |EH|$.

Notons $\mathscr{A}(\Delta)$ l'aire d'un triangle Δ.

On a alors : $\frac{|AX|}{|AD|} = \frac{|AD|+|DX|}{|AD|} = 1 + \frac{|DH|}{|AD|}$.

Or, $\frac{|DH|\cdot|BC|}{2} = \mathscr{A}(BCH) \iff |DH| = \frac{2\cdot\mathscr{A}(BCH)}{|BC|}$.

Donc, $1 + \frac{|DH|}{|AD|} = 1 + \frac{2\cdot\mathscr{A}(BCH)}{|AD|\cdot|BC|} = 1 + \frac{2\cdot\mathscr{A}(BCH)}{2\cdot\mathscr{A}(ABC)} = 1 + \frac{\mathscr{A}(BCH)}{\mathscr{A}(ABC)}$.

On a de même : $\frac{|BY|}{|BE|} = 1 + \frac{\mathscr{A}(ACH)}{\mathscr{A}(ABC)}$ et $\frac{|CZ|}{|CF|} = 1 + \frac{\mathscr{A}(ABH)}{\mathscr{A}(ABC)}$.

Pour finir, $\frac{|AX|}{|AD|} + \frac{|BY|}{|BE|} + \frac{|CZ|}{|CF|} = 3 + \frac{\mathscr{A}(BCH)+\mathscr{A}(ACH)+\mathscr{A}(ABH)}{\mathscr{A}(ABC)} = 3 + \frac{\mathscr{A}(ABC)}{\mathscr{A}(ABC)} = \boxed{4}$.

La réponse est 4 aussi pour la partie a) qui est un cas particulier.

Question 4

Sur un carré 9×9 *divisé en* 81 *cases* 1×1,

a) Quel est le plus grand nombre de cases telles que deux quelconques de ces cases ne *sont* jamais *ni dans une même ligne, ni dans une même colonne ?*

b) Quel est le plus grand nombre de cases telles que deux quelconques de ces cases ne *se touchent* jamais *en exactement un coin ?*

c) Quel est le plus grand nombre de cases telles que deux quelconques de ces cases ne *sont* jamais *dans une même parallèle à l'une des deux diagonales ?*

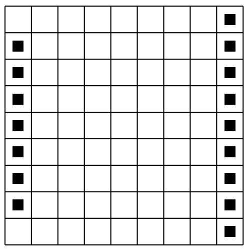
d) Quel est le plus grand nombre de cases telles que deux quelconques de ces cases ont toujours leurs centres à distance différente de $\sqrt{5}$ *?*

Solution inspirée de celles de Daniel Cortild, Marie Determe, Emilan Dürrüoglu, Quentin Dusart et Daniel Smolders

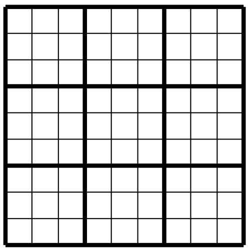
a) La réponse est 9. En effet si 10 cases ou plus étaient prises, par le principe des tiroirs une ligne au moins en contiendrait au moins 2—ce qui est exclu. Il existe 9 cases satisfaisant l'énoncé, par exemple les 9 cases d'une diagonale.

b) Les parallèles à la diagonale D qui part de la case inférieure gauche comptent 1, 2, …, 9, 8, …, 1 cases respectivement. Dans une telle parallèle, nous ne pouvons prendre qu'une case sur deux. Si la parallèle a k cases, nous y prenons donc au plus $(k+1)/2$ ou $k/2$, selon que k est impair ou pair. Ainsi nous pouvons choisir au plus 45 cases. Les 45 cases des lignes 1, 3, 5, 7 et 9 forment un exemple admis.

c) Chacune des 17 parallèles à la diagonale D ne peut contenir qu'au plus une case choisie. En outre, les deux parallèles extrêmes sont formées d'une seule case. Comme ces deux cases sont ensemble sur l'autre diagonale, elles ne peuvent être simultanément choisies. Donc le nombre cherché vaut au plus 16. Voici un exemple avec 16 cases :



d) Deux cases ont leurs centres à distance $\sqrt{5}$ exactement si le passage direct de l'une à l'autre dans le tableau se fait grâce à soit un pas de 2 horizontal suivi d'un pas de 1 vertical, soit un pas de 2 vertical suivi d'un pas de 1 vertical. En effet, la seule manière d'exprimer 5 comme somme de deux carrés de naturels est $5 = 2^2 + 1^2$. Colorions les 81 cases comme celles d'un damier, avec les quatre cases de coin en noir. Les 41 cases noires répondent à l'énoncé. Ensuite, montrons par l'absurde qu'aucun choix de 42 cases (ou plus) ne peut convenir. Pour cela, divisons le tableau en 9 sous-tableaux 3×3 :



a	b	c
d		a
b	c	d

	$*$	
$*$	$*$	$*$
	$*$	

$*$		$*$
	$*$	
$*$		$*$

Dans un sous-tableau 3×3, au plus 5 cases peuvent être choisies : dans l'exemple ci-dessus, 2 cases marquées de la même lettre ne peuvent être simultanémant prises. De plus, 5 cases ne peuvent être prises que selon une des deux configurations ci-dessus. Tout choix de 42 cases dans la réunion des 9 sous-tableaux 3×3 impose de prendre 5 cases dans au moins 6 sous-tableaux (car on ne peut prendre 5 cases dans un sous-tableau). Notons que nous ne pouvons trouver côte à côte ou l'un en-dessous de l'autre deux sous-tableaux à cinq cases (qu'ils soient du même type ou pas). Pour éviter le côte à côte, nous devrions placer les 6 sous-tableaux contenant cinq cases choisies en deux colonnes le long des côtés verticaux du tableau, et du coup deux de ces sous-tableaux seraient l'un en-dessous de l'autre, une contradiction.

Une autre manière de montrer qu'il est impossible de sélectionner 42 cases (ou plus) est d'apparier deux par deux 80 cases du tableau donné, de sorte que deux cases appariées sont à distance $\sqrt{5}$ (au plus une de ces deux cases peut alors être choisie, ce qui en donne 40, et nous pouvons encore éventuellement choisir la 81-$^{\text{e}}$case ; ainsi le nombre total de cases choisies ne peut dépasser 41). Voici un tel appariement :

A	B	1	2	Z	Y	W	X	V
C	D	Z	3	1	X	V	Y	W
B	A	2	4	11	13	14	T	U
D	C	3	5	14		12	R	S
F	E	4	6	12	11	13	U	T
H	G	5	7	10	8	9	S	R
E	F	6	8	9	7	10	P	Q
G	H	I	J	K	L	M	N	O
I	J	K	L	M	N	O	Q	P

Liste des donateurs

Au nom des lauréats, la Commission Olympiade tient à remercier chaleureusement les ministres, les institutions, les associations ainsi que les sociétés commerciales qu'elle a l'honneur de compter parmi les donateurs de cette 45e édition de l'OMB. L'intérêt et le soutien, sans cesse renouvelés, que ces « sponsors » portent à l'organisation de l'OMB est un gage du sérieux de celle-ci. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre plaisir de récompenser en leurs noms nos finalistes.

La Fédération Wallonie-Bruxelles

Mme Caroline Désir, Ministre de l'Éducation en FWB

M. Gilles Mahieu, Gouverneur de la Province du Brabant Wallon
M. Denis Mathen, Gouverneur de la Province de Namur
Mme. Catherine Delcourt, Gouverneure ff de la Province de Namur

M. Yvon Englert, Recteur de l'ULB
M. Pierre Wolper, Recteur de l'ULiège
M. Vincent Blondel, Recteur de l'UCLouvain
M. Philippe Dubois, Recteur de l'UMons
M. Naji Habra, Recteur de l'UNamur

M. Olivier Markowitch, Doyen de la faculté des sciences de l'ULB

M. Michel Rigo, Président du Département de Mathématique de l'ULiège

M. Yvik Swan, Président de la Société Mathématique de Belgique

M. Olivier Golinveau, Coordinateur opérationnel de la Maison des Maths et du Numérique de Quaregnon
M. Jean-Christophe Deledicq, des Éditions du Kangourou à Paris
M. Pascal Houdard, des Éditions Pôle et Tangente à Combon

Le Domaine des grottes de Han-sur-Lesse
L'ASBL Les Découvertes de Comblain-au-Pont

L'Archéosite et Musée d'Aubechies de Beloeil
Le musée du Malgré-tout à Liège
Le château de Beloeil
Le parc Parir Daiza à Brugelette
Le Musée Hergé à Louvain-la-Neuve
Le Musée d'Art de Charleroi

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Et tout particulièrement,

Mme Catherine WUIDAR, *Space Marketing Manager* à l'Euro Space Center à Transinne qui offre une « Mission Discovery » aux gagnants des Olympiades miDi et maXi,

Mme Agathe DUCA-COMBALUZIER, Responsable marketing France et Belgique de la firme CASIO qui offre une calculatrice à tous les participants.

Rendez-vous en 2021 pour la 46^{e} olympiade ?

Sous réserve de modification, voici les dates de la 46^{e} édition de l'Olympiade en 2021 :

Éliminatoire : mercredi 13 janvier 2021

Demi-finale : mercredi 3 mars 2021

Finale : mercredi 21 avril 2021

Proclamation : samedi 8 mai 2021

Nous vous donnons d'ores et déjà rendez-vous !

EURO SPACE CENTER

mdm

ÉDITIONS POLE

Wallonie

CHÂTEAU DE BELŒIL
LE VERSAILLES BELGE

PAIRI DAIZA
LE JARDIN DES MONDES

Domaine des Grottes de han

PRÉHISTOIRE ET ANTIQUITÉ
TREIGNES
MUSÉE DU MALGRÉ-TOUT

Province de liège

Musée des Beaux Arts

les découvertes de Comblain

MUSÉE HERGÉ

Le Brabant wallon

Archéosite et Musée d'Aubechies-Beloeil

ASBL

S B P M

e.f.

Avec le soutien de la
Fédération Wallonie - Bruxelles

FÉDÉRATION
WALLONIE-BRUXELLES

Éditeur responsable : Michel Sebille / 156 rue Osseghem / 1080 Molenbeek-Saint-Jean