Société Belge
des Professeurs
de Mathématique
d'expression française

Proclamation des lauréats de la 46e Olympiade Mathématique Belge

Proclamation en ligne

22 mai 2021

La cérémonie de proclamation des résultats de l'Olympiade Mathématique Belge prend traditionnellement ses quartiers dans l'un des centres universitaires de la Fédération Wallonie-Bruxelles. La SBPMef y voit une marque de soutien importante pour le travail inlassable de ses membres — tous bénévoles — au service de l'enseignement des mathématiques. Néanmoins, pour des raisons sanitaires, la proclamation sera cette année en ligne. Nous espérons vous revoir l'année prochaine pour une cérémonie « en vrai ».

SBPMef... Renseignements pratiques

Siège administratif :	SBPMef Campus UMons, Bâtiment 4 Avenue Maistriau 19 7000 Mons
Secrétariat :	Cristina Carruana Tél/Fax : 065.37.33.04 Courriel : sbpm@sbpm.be
Compte financier :	IBAN BE26 0000 7280 1429 - BIC BPOTBEB1
Site Internet	http://www.sbpm.be
Site de l'OMB	http://omb.sbpm.be/

La conférence

Mais non pas joli gone, golygone !

Michel Sebille
École Européenne de Bruxelles III à Ixelles

La SBPMef… vous connaissez ?

La mathématique est un des facteurs de l'essor économique, technique, scientifique et culturel des sociétés. Son implication croissante dans le développement de toutes les activités humaines, la place qu'elle prend par le truchement de l'informatique, en font un outil indispensable à la compréhension du monde.

La mathématique n'est pas seulement un outil au service des autres disciplines. Elle est aussi un art qui a sa vie propre et son histoire, avec les problèmes épistémologiques qu'elle suscite. Par là, elle a une valeur culturelle incontestable. D'où l'importance de l'objectif que s'est fixé la SBPMef.

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française est née en 1974 à la suite d'une restructuration linguistique de la Société Belge des Professeurs de Mathématique créée elle-même en 1953. Son but principal est de contribuer à la promotion et à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique.

Cette société s'est constituée en une a.s.b.l. qui tend à représenter l'ensemble des professeurs de mathématique de la partie francophone du pays. Elle rassemble en effet des enseignants de tous les réseaux (officiel, libre, communal et provincial) et de tous les niveaux d'enseignement (instituteurs, AESI, AESS, professeurs de Haute École ou d'Université).

Des inspecteurs, des conseillers pédagogiques et des chercheurs participent régulièrement à ses activités. Regroupant ainsi différentes forces de l'enseignement de la mathématique, la SBPMef peut s'affirmer comme un représentant privilégié des professeurs de mathématique auprès du (ou des) Ministère(s) qui ont en charge l'Éducation, la Recherche et la Formation dans notre Fédération Wallonie-Bruxelles ainsi qu'auprès de divers organismes concernés par l'enseignement des mathématiques. Elle peut ainsi promouvoir, et le cas échéant, défendre valablement sa conception d'un enseignement assurant une large place au développement des capacités créatrices des élèves.

Le nombre de membres de la SBPMef oscille autour de 600, tous professeurs de mathématique en Fédération Wallonie-Bruxelles. Son conseil d'administration comprend 24 membres élus qui se partagent l'organisation des activités principales de la société.

La SBPMef a participé à la création de la *Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs* (la CAPP) en Communauté française de Belgique. Elle tient également sa place au niveau de la Communauté mathématique internationale ; elle est membre fondateur de la *Fédération Européenne des Associations de Professeurs de Mathématiques* (la FEAPM) et de la récente Fédération francophone des associations pour l'enseignement des mathématiques (FFAEM). Elle est aussi membre du Comité international des Jeux mathématiques (CIJM).

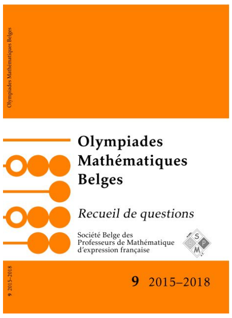
Épinglons un important travail de publication, certaines périodiques, d'autres plus ponctuelles, notamment des dossiers d'exploration didactique destinés à aider à la conception et à l'animation de l'enseignement de la mathématique.

La SBPMef organise également plusieurs compétitions de même que la participation de nos élèves aux olympiades internationales. L'organisation de l'Olympiade Mathématique pour environ 26000 étudiants en Communauté française (éliminatoires dans les établissements, demi-finales régionales et finale communautaire) ne serait possible sans la participation bénévole d'équipes régionales particulièrement dynamiques. Nos meilleurs étudiants participent à l'Olympiade Mathématique Internationale ainsi qu'à l'Olympiade du Benelux, mais également à l'EGMO pour les filles.

Enfin, la Société organise chaque année un Congrès qui se réunit trois jours fin août alternativement dans des locaux de l'un de nos trois principaux réseaux d'enseignement : conférences, exposés, ateliers et expositions sont au menu.

Depuis 2004, la Société facilite la participation de classes de l'enseignement fondamental et du premier degré au *Rallye Mathématique transalpin.*

Les brochures OMB



Les recueils des anciennes questions des Olympiades ont été régulièrement publiés par la SBPMef. Actuellement les brochures *Olympiades Mathématiques Belges – Tomes 6, 7 et 9*, collationnées par Pascal Dupont, Benoit Baudelet et Brigitte Bonnewyn sont disponibles. Elles reprennent toutes les questions posées lors des deux premières étapes des Olympiades Belges des années 2003 à 2010 et 2015 à 2018, ainsi que les questions des finales.

Que ce soit pour les miNi, les miDi ou les maXi, les questions ont été regroupées par matière et classées selon un ordre de difficulté croissante. On y trouve : Arithmétique et Algèbre, Géométrie, Logique, Analyse combinatoire et Probabilités et Problèmes divers.

La SBPMef vous invite à acquérir ces livres à la fois comme textes de référence pour une préparation à l'Olympiade elle-même, mais également comme recueils d'exercices non triviaux d'application des notions mathématiques enseignées dans les classes.

Les tomes 6 et 7 sont vendus au prix de 6 € (4 € pour les membres), le tome 9 est vendu au prix de 8 € (5 € pour les membres). Des réductions sont accordées pour l'achat de plusieurs tomes. L'ouvrage « Clés pour les olympiades » est également disponible.

Pour les frais de port ou pour les conditions particulières d'achat par quantité, consultez notre secrétaire Cristina au 065.37.33.04 ou par courrier électronique à l'adresse `sbpm@sbpm.be`.

L'Olympiade Mathématique Belge

C'est en 1976, à l'initiative du Professeur Buekenhout (ULB), que la SBPMef a créé une épreuve annuelle : l'Olympiade Mathématique Belge (OMB). Cette extraordinaire aventure s'est poursuivie grâce au formidable travail fourni par l'importante équipe de bénévoles qui gèrent cette compétition – tout à fait amicale – aussi bien sur le plan administratif que sur le plan scientifique, ainsi que grâce à l'enthousiasme des élèves participants et de leurs professeurs qui les incitent à s'inscrire et qui les motivent.

Elle est ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire francophone belge ou luxembourgeois (tous réseaux, tous niveaux). Dès 1977, elle se subdivise en deux catégories « Mini » et « Maxi » respectivement réservées aux élèves des trois classes inférieures et des trois classes supérieures. En 1996, une catégorie intermédiaire a été créée et désormais, l'Olympiade est subdivisée en trois catégories : « Mini », « Midi » et « Maxi », destinées respectivement aux élèves des 1er, 2e et 3e degrés de l'enseignement secondaire. Les participants trouvent ainsi dans le questionnaire qui leur est destiné une source de matières qui les ciblent au mieux.

Le jury national est composé de professeurs des enseignements secondaire, supérieur et universitaire ainsi que d'inspecteurs et de conseillers pédagogiques. Il a en charge la responsabilité générale de l'organisation de l'Olympiade et est secondé matériellement par le secrétariat de la SBPMef qui se charge des expéditions. Le jury a plus particulièrement la lourde charge de la création et de la rédaction précise des questions des diverses compétitions.

L'*éliminatoire* se déroule dans chaque école inscrite sous la responsabilité d'un professeur qui réceptionne, début janvier, les questionnaires ; il est chargé de la bonne organisation de l'éliminatoire au sein de son école. Le grand nombre d'inscrits impose de recourir à des questionnaires à choix multiples pour cette éliminatoire (actuellement, une réponse valable à trouver parmi cinq proposées). Le jury s'efforce néanmoins de donner aux questions un caractère « peu scolaire » de façon à obliger les élèves à faire preuve de leur capacité à appliquer leurs connaissances et à les transposer à des situations nouvelles. La durée de l'épreuve, 90 minutes pour répondre à 30 questions, les oblige à traiter d'abord les questions les plus accessibles. Afin d'éviter les choix au hasard, une réponse erronée à une question est pénalisée par rapport à une absence de réponse. De plus, le jury prévoit toujours que quelques questions ne soient pas à choix multiples, mais nécessitent une réponse qui est un nombre entier compris entre zéro et 999. Aidé de grilles de correction extrêmement précises, le professeur responsable organise dans son établissement la correction de cette première épreuve. Il envoie les résultats à son secrétaire régional. Il y a actuellement dix secrétaires régionaux (Arlon, Bruxelles, Charleroi, Liège, Louvain-La-Neuve, Luxembourg, Marche-en-Famenne, Mons, Namur et Tournai) qui ont en charge de lourdes responsabilités. Ce sont eux qui sélectionnent les demi-finalistes sur base des résultats communiqués par les écoles. Ils rédigent les statistiques année par année pour leur région et expédient ces données dans les écoles. Ils convoquent les demi-finalistes et organisent les demi-finales.

Les épreuves de la *demi-finale* sont du même type (la plupart des questions à choix multiples et quelques questions dont la réponse est un nombre entier compris entre 0 et 999) que lors des éliminatoires, mais les questions présentent un degré de difficulté légèrement supérieur. Enfin, les responsables régionaux et leurs équipes corrigent les épreuves et transmettent les résultats au secrétariat national. C'est ensuite au jury national qu'il appartient de déterminer quels seront les *finalistes*. Ceux-ci sont invités en un lieu central (en principe Namur) et travaillent pendant 4 heures à la résolution de problèmes difficiles. Il est conseillé aux finalistes de mettre par écrit toutes les démarches qu'ils entreprennent car le jury valorise les idées intéressantes, y compris celles dont il n'était pas évident *a priori* qu'elles n'aboutiraient pas. Le jury national corrige ces épreuves finales et choisit les lauréats. Si la compétition a ainsi successivement un caractère local, puis régional et enfin communautaire, tous les élèves sont néanmoins confrontés aux mêmes difficultés puisque toutes les questions sont préparées par le même jury national.

Depuis quelques années, tous les finalistes sont invités à la proclamation solennelle des résultats et y reçoivent un diplôme de participation ainsi que de nombreux prix. La SBPMef est à ce niveau aidée par les nombreux mécènes qui soutiennent la compétition. Des prix spéciaux sont en outre attribués aux élèves de 1$^{\text{re}}$, 3$^{\text{e}}$ et 5$^{\text{e}}$ années parvenus en finale et ayant fait montre d'un talent mathématique précoce et prometteur. Le prix Willy Vanhamme récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues.

Le but poursuivi par la SBPMef en organisant l'Olympiade est triple : intéresser les élèves à l'activité mathématique par le biais d'une compétition, d'un grand jeu qui les passionne ; mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation mathématique des élèves en proposant des problèmes qui font appel à la créativité, à l'imagination, aux capacités réelles de raisonnement ; fournir aux professeurs un choix d'exercices non élémentaires, originaux, d'un type différent de ceux figurant dans la plupart des manuels.

L'impact de l'Olympiade sur l'enseignement n'est pas négligeable. On constate en effet que nombre d'enseignants et d'auteurs de manuels réutilisent des questions posées à l'Olympiade dans le cadre de leurs cours.

En 2021, les nombres de participation s'établissent comme suit :

	Éliminatoires	Demi-finales	Finale	Lauréats
Mini	6182	annulée	20	7
Midi	2794	annulée	20	7
Maxi	2476	annulée	20	8
Total	11452		60	22

Jury de l'Olympiade

Responsable national : Michel SEBILLE

Trésorier : Marc DE NEEF

Secrétariats régionaux :

Arlon :	Xavier HAINAUT
Bruxelles :	Vincent DE CLERCK
Charleroi :	Valérie BAS
Liège :	Yvan HAINE
Louvain-la-Neuve :	Jean-Pierre TURPIN
Luxembourg :	Mike DOSTERT
Marche-en-Famenne :	Christelle BOULANGER
Mons :	Stéphanie BRIDOUX
Namur :	Pascal HENRY
Tournai :	Lawrence DUFRANNE

Jury national :

Président du jury : Pascal DUPONT

Secrétaire du jury : Benoit BAUDELET

Rédactrice des questionnaires : Lise PONSELET

Membres du Jury : Benoit BAUDELET, Andrée BOGAERTS, Francis BUEKENHOUT, Sylvain COURTOIS, Vincent DALOZE, Géry DEBONGNIE, Brigitte DE CONINCK, Jean-Paul DOIGNON, Marc DE NEEF, Pascal DUPONT, Bernard FELTEN, Dimitri FOUCART, Nicolas FRANCO, Yvan HAINE, Lionelle LAMY, Jules MIÉWIS, Nicole MIÉWIS, Éveline MOITROUX, Philippe NIEDERKORN, Lise PONSELET, Michel SEBILLE, Pascal ZEIHEN

Membres correspondants : Vidal AGNIEL, Martine DEVILLERS, Françoise DUCHÊNE-VALETTE, Pierre-Alain JACQMIN, Dany LEGRAND, Boris MEYNSBRUGHEN, Monique MILCAMPS-WILMET, Nicolas RADU, Yolande ROCH-NOËL et Simone TROMPLER

Olympiade Internationale (Belgique) : Gérald TROESSAERT assisté de Philippe NIEDERKORN (sélection et accompagnement) et Nicolas RADU

Olympiade Mathématique du Benelux : Nicolas RADU et Hoan-Phung BUI

European Girls' Mathematical Olympiad : Michel SEBILLE

Olympiade Francophone de Mathématique : Pierre-Alain JACQMIN

Olympiades Internationales diverses (Grand-Duché de Luxembourg) : Mike DOSTERT, Bernard FELTEN, Pierre HAAS, Philippe SCHRAM et Pascal ZEIHEN

Collecte des lots et préparation de la proclamation : Jules MIÉWIS assisté de Cristina CARRUANA et Nicole MIÉWIS

Palmarès : Michel SEBILLE

Préparations aux olympiades internationales : Benoit BAUDELET, Corentin BODART, Hoan-Phung BUI, Quentin CLAUS, Cédric DE GROOTE, Pascal DUPONT, Nicolas FRANCO, Damien GALANT, Xavier GONZE, Rodrigue HAYA ENRIQUEZ, Pierre-Alain JACQMIN, Savinien KRECZMAN, Benoît LEGAT, Simon LEMAL, Jean-François MACQ, Philippe NIEDERKORN, Laure NINOVE, Cédric PILATTE, Nicolas RADU, Michel SEBILLE, François THILMANY, Gérald TROESSAERT

Palmarès de la 46e OMB

Lauréats de la Mini-Olympiade 2021

Ont obtenu un premier prix

1	SHI Ryan	1	St John's Intern. School	Waterloo
2	MENNA Giovanni	1	Collège Cardinal Mercier	Braine-L'Alleud

A obtenu le deuxième prix

3	ANDRIAN ALBESCU Stefan	2	École Européenne III	Ixelles

Ont obtenu un troisième prix

4	CLAESSENS Thomas	1	Lycée Saint-Jacques	Liège
5	MANDAL Parag	2	Collège Saint-Barthélemy	Liège
6	NUYTS Samuel	2	École Européenne III	Ixelles
	TIMOSHKOV Artem	2	Collège Saint-Michel	Etterbeek

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élèves de 1re année

Claessens Thomas	Lycée Saint-Jacques	Liège
Maire Arnaud	Athénée Royal	Bastogne
Menna Giovanni	Collège Cardinal Mercier	Braine-L'Alleud
Rihai Aydin	Collège Saint-Hubert	Watermael-Boitsfort
Shi Ryan	St John's Intern. School	Waterloo
Voisin Mathieu	École Européenne II	Woluwe-St-Lambert

Ont également participé à la finale

Caine Maxime	2	Lycée Français Jean Monnet	Uccle
Debroux Marguerite	2	Collège Saint-Michel	Etterbeek
Derouaux Martin	1	Institut Saint-François	Ouffet
Giannini Eva	2	Athénée Royal	Izel
Pringent Amaury	1	Inst. St-Boniface Parnasse	Ixelles
Siklosi Péter	2	Collège Jean XXIII	Woluwe-St-Pierre
Tikdag Imran	1	Athénée Royal	Marche-en-Famenne
Vanvarembergh Amy	2	Collège Cardinal Mercier	Braine-L'Alleud
Wilkin Diego	2	Collège Sainte-Gertrude	Nivelles
Zhou Muyang	1	Collège Saint-Pierre	Uccle

Palmarès de la 46e OMB

Lauréats de la Midi-Olympiade 2021

A obtenu le premier prix

1	ANTOINE Robin	3	Sint-Franciscus Instituut	Brakel

A obtenu le deuxième prix

2	ZAKINE Akram	3	Athénée Robert Catteau	Bruxelles

Ont obtenu un troisième prix

3	DÜRRÜOGLU Pierre Akin	3	Schola Nova	Incourt
	WEZEL Augustin	4	Collège Saint-Michel	Etterbeek
5	TARIN Mélanie	4	Collège du Sacré-Cœur	Charleroi
6	WAUTERS Arthur	4	Athénée Royal	Arlon
7	JOSSART Lorick	3	École Decroly	Uccle

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élèves de 3e année

ANTOINE Robin	Sint-Franciscus Instituut	Brakel
DE VEUSTER Clémence	Athénée Royal	Hannut
DÜRRÜOGLU Pierre Akin	Schola Nova	Incourt
JOSSART Lorick	École Decroly	Uccle
WINKIN Adrien	Athénée Royal	Herstal
ZAKINE Akram	Athénée Robert Catteau	Bruxelles

Ont également participé à la finale

BURTON Lucie	3	Institut Sainte-Marie	Arlon
CHANMUGAN Anissa	4	Collège Saint-Pierre	Uccle
CHANTRY Noé	4	Collège Notre-Dame	Tournai
COLLART Pierre	3	Collège Saint-Hubert	Watermael-Boitsfort
HANZL Tadeáš	4	École Européenne III	Ixelles
MAZY Arnaud	3	Athénée Royal Air Pur	Seraing
PIERRET Nathan	3	Schola Nova	Incourt
SCORIELS Guillaume	4	Collège Saint-Pierre	Uccle
VAN PACHTERBEKE Guillaume	3	Collège du Christ-Roi	Ottignies

Palmarès de la 46^{e} OMB

Lauréats de la Maxi-Olympiade 2021

A obtenu le premier prix

1	DÜRRÜOGLU Emilhan	6	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud

Ont obtenu un deuxième prix

2	DETERME Marie	6	Institut Notre-Dame Séminaire	Bastogne
	DUBOIS Samuel	6	Collège d'Alzon	Bure
4	FAYS Olivier	6	Institut Saint-Roch	Theux

Ont obtenu un troisième prix

5	DUSART Quentin	6	Lycée Saint-Jacques	Liège
6	LÊ Vincent	6	Institut des S. de Notre-Dame	Anderlecht
7	SCHMIT Manon	6	Institut Notre-Dame	Arlon
8	KOCMANOVÁ Alžběta	6	École Européenne III	Ixelles

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élèves de 5e année

COCHÉ Lucien	Communauté Scolaire Sainte-Marie	Namur
MIHAYLOV Alexsander	École Européenne II	Woluwe-St-Lambert
MUÑOZ Mateo	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
VITORAC Petar	Collège Saint-Pierre	Uccle

Ont également participé à la finale

CHAMPAGNE Alexandre	6	Collège Saint-Guibert	Gembloux
CHIRITA Ioan-Catalin	6	Athénée Royal Air Pur	Seraing
D'ANGELO Olivier	5	Athénée Royal Charles Rogier	Liège
DE WINTER Adrien	5	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud
DUBOIS Bastien	5	Collège d'Alzon	Bure
SCHMITT Carlo	6	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
SÎRBU Traian-Florin	6	Institut Saint-André	Ixelles

Prix Vanhamme 2021

Ce prix récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues.

Le lauréat est

Robin ANTOINE

élève de 2e année au Sint-Franciscus Instituut à Brakel.
Il reçoit ce prix pour sa résolution de la question miDi 4.

Olympiade Francophone de Mathématiques

L'Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM) a été créée en 2020 et rassemble, comme son nom l'indique, des élèves issus de différents pays francophones. Le format est similaire à celui de la BxMO, à ceci près que l'OFM comporte une catégorie Senior et une catégorie Junior, réservée aux élèves de moins de 16 ans. Bien sûr, les énoncés ont aussi la particularité d'être en français pour tous les participants.

La Suisse s'est occupée de l'organisation de la deuxième édition de l'OFM, qui s'est déroulée en ligne les 27 et 28 mars 2021. Les deux catégories ont rassemblé, au total, 88 étudiants issus de neuf pays (Algérie, Belgique, Cameroun, Canada, France, Luxembourg, Maroc, Suisse et Tunisie). La Belgique était représentée par Robin ANTOINE, Pierre DUQUET, Lisa INFANTINO, Robin VIERLINCK et Georges TÉZÉ en catégorie Junior, et Marie DETERME, Emilhan DÜRRÜOGLU, Quentin DUSART, Olivier FAYS, Mateo MUÑOZ et Daniel SMOLDERS en catégorie Senior. La correction et les coordinations des copies belges ont été assurées par Pierre-Alain JACQMIN et Nicolas RADU.

Des médailles et mentions honorables ont été attribuées selon les mêmes règles que pour les autres compétitions internationales. Nos élèves ont été récompensés de trois médailles d'argent (Robin ANTOINE, Robin VIERLINCK et Daniel SMOLDERS) et trois médailles de bronze (Quentin DUSART, Olivier FAYS et Emilhan DÜRRÜOGLU).

Les résultats complets, ainsi que les énoncés et solutions de tous les problèmes, peuvent se trouver sur le site `igm.univ-mlv.fr/~juge/ofm/`.

Olympiade Mathématique Internationale

Saint-Pétersbourg en Russie a accueilli virtuellement du 19 au 28 septembre 2020 la 61e Olympiade Mathématique Internationale (OMI). Un total de 616 étudiants (dont 56 filles) issus de 105 pays ont participé à l'épreuve.

Comme c'est le cas depuis plusieurs années maintenant, l'équipe belge était composée de six étudiants (trois néerlandophones et trois francophones), sous la conduite de Bart WINDELS (leader) et de Philippe NIERDERKORN (deputy leader).

L'épreuve consiste en la résolution de six problèmes, chaque problème est coté sur sept points. Lorsque les corrections sont terminées, le jury de l'OMI définit les seuils d'attribution des médailles de la façon suivante : la moitié des participants au plus sont médaillés. Parmi les médaillés, un tiers au plus obtiennent une médaille d'argent et un sixième au plus une médaille d'or. Cette clé de répartition a donné les seuils suivants : médaille de bronze 15/42, médaille d'argent 24/42 et médaille d'or 31/42. De plus, une mention honorable est accordée à chaque concurrent non médaillé ayant obtenu le maximum à une question au moins. À Saint-Petersbourg, 49 médailles d'or, 112 médailles d'argent, 155 médailles de bronze et 173 mentions honorables ont été décernées.

Voici les résultats des participants belges :

Jonas DE SCHOUWER (nl) : 26 points — médaille d'argent

Amos NICODEMUS (nl) : 20 points — médaille de bronze

Daniel CORTILD (fr) : 19 points — médaille de bronze

Dora CHEN (nl) : 10 points — médaille de bronze

Emilhan DÜRRÜOGLU (fr) : 10 points — mention honorable

Olivier FAYS (fr) : 9 points

La tradition veut que l'épreuve comporte deux problèmes dits « faciles », deux problèmes de difficulté moyenne et deux problèmes difficiles pour départager les meilleurs. Puisque cette année le seuil des médailles de bronze était au score de 15, il s'ensuit qu'il fallait résoudre l'équivalent de plus de deux questions complètes pour entrer dans les médaillés. Un participant originaire de Chine obtient le score parfait de 42 points.

Bien que l'OMI soit une épreuve individuelle, il est inévitable de s'intéresser aux résultats globaux des différents pays. La Belgique se classe au 50e rang (sur 105) d'un officieux classement inter-nations. Le trio de tête est composé de la Chine suivie de la Russie et des USA.

La 62e Olympiade Mathématique Internationale sera à nouveau accueillie virtuellement par Saint-Pétersbourg en Russie. Elle se tiendra du 14 au 24 juillet 2021.

Pour plus d'informations : `http://www.imo-official.org`

European Girl's Mathematical Olympiad

La participation féminine aux olympiades internationales est faible voire pour certains pays quasiment inexistante. Il s'est ainsi récemment écoulé 16 années sans participation d'une Belge aux OMI jusqu'à ce qu'une participante néerlandophone prenne part à l'édition 2016. Depuis, une participante francophone ou néerlandophone est sélectionnée chaque année.

Afin d'encourager une participation féminine à ces compétitions ainsi qu'à des études de mathématiques, il a été décidé d'organiser, à partir de 2012, une compétition réservée exclusivement aux filles. Celle-ci fut baptisée « European Girl's Mathematical Olympiad ».

Cette année, 213 participantes venant de 55 pays se sont affrontées (37 pays européens et 18 pays invités). La Belgique était représentée par Dora Chen, Camille Coppieters, Marie Determe, Camille Laloux (participantes), Michel Sebille (leader) et Samira Le Grand (deputy leader).

La compétition devait se dérouler à Kutaisi en Géorgie, mais les conditions sanitaires ont imposé d'organiser une édition en ligne.

Au niveau du résultat, la Belgique a fini vingt-sixième sur cinquante-cinq. Dora Chen et Marie Determe sont 42^{e}, Camille Laloux 149^{e} et Camille Coppieters 167^{e}. Dora Chen et Marie Determe obtiennent une médaille d'argent. La compétition individuelle a été remportée par trois participantes russes réalisant un score de 42/42. La compétition par équipe est remportée par la Russie devant le Royaume-Uni et la Roumanie.

Les résultats et énoncés des problèmes sont disponibles sur le site `http://www.egmo.org`
La prochaine édition se déroulera à Eger en Hongrie.

Olympiade Mathématique du Benelux

Depuis 2009 est organisée chaque année une olympiade de mathématiques du Benelux, plus connue sous l'acronyme anglais BxMO (Benelux Mathematical Olympiad). Comme la majorité des autres olympiades « régionales » organisées en Europe et ailleurs, elle a pour but de favoriser les contacts entre les pays participants, tout en offrant à quelques étudiants de chacun d'eux la possibilité d'acquérir, dans le cadre d'une compétition internationale, une expérience qui pourra se révéler précieuse pour une éventuelle participation à l'Olympiade Mathématique Internationale (OMI). L'épreuve proprement dite dure 4 h 30 et comporte quatre problèmes, notés chacun sur 7 points.

Le niveau de difficulté est plus élevé que celui des olympiades nationales des pays participants, mais le questionnaire reste plus abordable que celui d'une OMI. Chaque pays peut envoyer une délégation de 10 candidats et de 3 accompagnateurs.

L'édition 2021 prévue aux Pays-Bas a été organisée en ligne les 1er et 2 mai. La délégation belge était composée de cinq étudiants francophones (Robin ANTOINE, Marie DETERME, Quentin DUSART, Olivier FAYS et Georges TÉZÉ) et de cinq étudiants néerlandophones (Dora CHEN, Lukas DAS, Rutger DOBBELAERE, Milan PICKAVET et Brecht VERBEKEN) et de quatre accompagnateurs : Nicolas RADU, Hoan-Phung BUI, Bart MICHELS et Stijn SYMENS.

Les Pays-Bas ont obtenu la première place devant la Belgique et le Luxembourg. Nous avons décroché une médaille d'or (Marie DETERME), deux médailles d'argent (Georges TÉZÉ et Brecht VERBEKEN), trois médailles de bronze (Dora CHEN, Olivier FAYS et Lukas DAS) et trois mentions honorables (Robin ANTOINE, Rutger DOBBELAERE et Quentin DUSART). Il est à noter que les médailles sont attribuées selon des critères identiques à ceux de l'OMI et que le meilleur score (25/28) a été réalisé par Marie DETERME à égalité avec un participant des Pays-Bas.

N'hésitez pas à consulter le site web `www.bxmo.org`. Vous y trouverez tous les classements, les questions et les solutions à tous les problèmes posés au cours de cette compétition enrichissante.

Conseil d'administration de la SBPMef

Conseil d'administration

Brigitte De Coninck, Jordan Detaille, Jean-Marc Desbonnez, Dominique Dumont, Pascal Dupont, Dimitri Foucart, Renée Gossez-Ketels, Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Dany Legrand, Christian Michaux, Jules Miéwis, Nicole Miéwis, Sarah Ory, René Scrève, Michel Sebille, Gérald Troessaert et Sébastien Verspecht.

Bureau exécutif de la Société

Présidente de la SBPMef :	Valérie Henry
Vice-Président :	Michel Sebille
Administrateur délégué :	Christian Michaux
Secrétaire :	Marie-France Guissard
Trésorier :	Christian Michaux

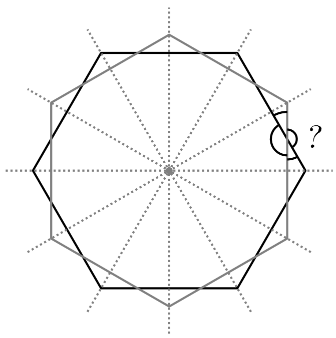
Responsables d'activités

Rédacteur en chef de *Losanges* :	Valérie Henry
Rédacteur de *SBPM-Infor* :	Renée Gossez-Ketels
Responsable du site internet :	Sébastien Verspecht
Responsable Olympiade Nationale :	Michel Sebille
Responsables Olympiade Internationale :	Gérald Troessaert, Philippe Niederkorn et Nicolas Radu
Responsable Olympiade du Benelux :	Nicolas Radu
Responsable Olympiade Mathématique Francophone :	Pierre-Alain Jacqmin
Responsable European Girl's Mathematical Olympiad :	Michel Sebille
Responsable Rallye Mathématique Transalpin :	Pauline Lambrecht
Présidente de la Commission Congrès :	Dominique Dumont
Représentants de la SBPMef à la CAPP :	René Scrève
Représentante de la SBPMef au CIJM :	Brigitte De Coninck

Questions de la finale Mini 2021

Question 1

Deux hexagones réguliers possèdent le même centre, la même longueur de côté et les mêmes axes de symétrie, comme sur la figure ci-contre. Leurs côtés se coupent en formant deux angles aigus et deux angles obtus. Déterminer les amplitudes de ces quatre angles.



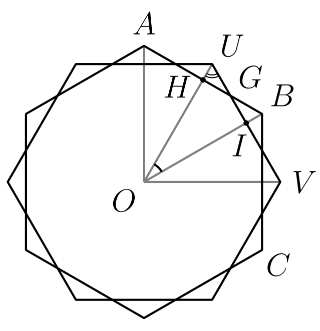
Solution de Maxime Caine Soit O le centre des 2 hexagones. Nous allons calculer l'amplitude de l'angle $\widehat{HGI}$ dans le quadrilatère $OHGI$.

Comme les hexagones ont mêmes axes de symétrie, tous les angles au centre sont égaux à $360° : 12 = 30°$.

Un hexagone étant constitué de 6 triangles équilatéraux, les angles $\widehat{OUI}$ et $\widehat{OBH}$ mesurent chacun 60°. Les triangles OUI et OBH sont donc rectangles en I et H.

Sachant que la somme des angles d'un quadrilatère est égale à 360°, on a $|\widehat{HGI}| = 150°$. L'angle $\widehat{IGB}$ étant le supplémentaire de $\widehat{HGI}$, on a $|\widehat{IGB}| = 30°$. Les angles $\widehat{IGB}$ et $\widehat{HGU}$, ainsi que $\widehat{HGI}$ et $\widehat{UGB}$, étant opposés par le sommet on a $|\widehat{HGU}| = 30°$ et $|\widehat{UGB}| = 150°$.

De même, à chaque intersection des 2 hexagones on a 4 angles d'amplitude 30°, 150°, 30° et 150°.



Question 2

À l'arrivée d'une course entre 3 sportifs A, B et C, voici trois exemples de résultats possibles en première position :
— A arrive en première position ;
— C arrive en première position ;
— A, B et C sont ex æquo.
Combien y a-t-il de résultats possibles en première position quand 4 sportifs font la course entre eux et la terminent ?

Solution de Artem Timoshkov

Il y a quinze résultats possibles.

En effet, chaque sportif arrive soit en première position soit n'arrive pas en première position. À chacune des deux possibilités pour un sportif correspondent deux possibilités pour un autre sportif, etc. Il y a ainsi 2^4 résultats possibles.

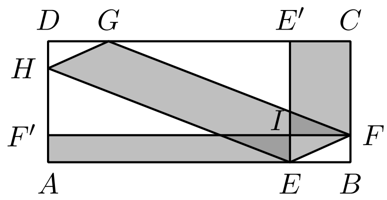
Puisque tous les sportifs ont terminé la course, le résultat ne donnant aucun des quatre sportifs en première position est à rejeter.

D'où les $2^4 - 1$ résultats possibles en première position.

Ces quinze résultats peuvent être énumérés. En nommant les sportifs A, B, C et D, on a :
- 4 arrivées avec un seul vainqueur : A, B , C ou D.
- 6 arrivées avec deux vainqueurs ex æquo : AB, AC, AD, BC, BD ou CD.
- 4 arrivées avec trois vainqueurs ex æquo : tous les quatre sauf A, sauf B, sauf C ou sauf D.
- 1 arrivée avec les quatre sportifs ex æquo.

Question 3

Soit $ABCD$ un rectangle, comme sur la figure ci-contre. Sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, les points E, F, G et H sont tels que $|AE| = |CG|$ et $|BF| = |DH|$. Les segments $[EE']$ et $[FF']$ sont parallèles aux côtés du rectangle $ABCD$, avec E' sur $[CD]$ et F' sur $[DA]$. Le point I est l'intersection de $[EE']$ et $[FF']$. Montrer que l'aire du quadrilatère $EFGH$ est égale à la somme des aires des rectangles $AEIF'$ et $IFCE'$.



Solution inspirée de celle de Stefan Andrian Albescu

Par simple découpage,

$$\mathscr{A}(EFGH) = \mathscr{A}(ABCD) - \mathscr{A}(AEH) - \mathscr{A}(BEF) - \mathscr{A}(CFG) - \mathscr{A}(DGH).$$

Ainsi, par symétrie,

$$\mathscr{A}(EFGH) = \mathscr{A}(ABCD) - 2\mathscr{A}(AEH) - 2\mathscr{A}(BEF) = \mathscr{A}(ABCD) - |AE| \cdot |AH| - |BE| \cdot |BF|.$$

Ou encore,

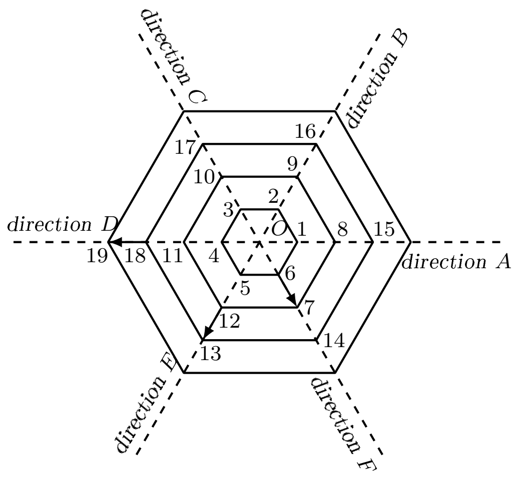
$$\mathscr{A}(EFGH) = \mathscr{A}(ABCD) - |F'I| \cdot |F'D| - |BE| \cdot |BF| = \mathscr{A}(ABCD) - \mathscr{A}(IE'DF') - \mathscr{A}(IEBF)$$

qui est équivalent à l'égalité demandée.

Question 4

Des hexagones réguliers de centre O sont disposés comme sur la figure ci-contre. Aux sommets de l'hexagone central sont inscrits les nombres naturels de 1 à 6. Aux sommets du deuxième hexagone sont inscrits les six nombres naturels suivants, décalés d'un sixième de tour autour du point O, et ainsi de suite. Chaque nombre est associé à une direction : les nombres 1, 8, 15... ont la direction A ; les nombres 2, 9, 16... ont la direction B, et ainsi de suite.

a) *Quel est le plus petit nombre sur le 8^e hexagone ?*
b) *Quelle est la direction de ce plus petit nombre sur le 8^e hexagone ?*
c) *Quel est le nombre dans la direction D du 50^e hexagone ?*
d) *Sur quel hexagone le nombre 2021 est-il inscrit ?*
e) *Quelle est la direction du nombre 2021 ?*



Solution de Maxime Caine

a) Il y a $7 \times 6 = 42$ nombres indiqués sur les 7 premiers hexagones. Le premier nombre du 8e hexagone est donc $42 + 1 = 43$.

b) Soit x le numéro de l'hexagone et $\mathscr{M}(6)$ un multiple de 6.

   1) lorsque $(x - 1) = \mathscr{M}(6)$, le plus petit nombre de cet hexagone est en direction A ;
   2) lorsque $(x - 1) = \mathscr{M}(6) + 1$, le plus petit nombre de cet hexagone est dans la direction F ;
   3) et ainsi de suite...

   Puisque $43 = \mathscr{M}(6) + 1$, il se trouve dans la direction F.

c) Commençons par calculer le plus petit nombre du 50e hexagone : $(50 - 1) \times 6 + 1 = 295$. Or $(50 - 1) = 49 = \mathscr{M}(6) + 1$; donc 295 a la direction F ; 296 a la direction A ;... 299 a la direction D.

d) $2021 = 336 \times 6 + 5$. Le nombre 2021 est donc inscrit sur le 337e hexagone.

e) Commençons par calculer le plus petit nombre du 337e hexagone : $(337-1)\times 6+1 = 2017$. On a $(337-1) = 336 = \mathscr{M}(6)$. Donc 2017 a la direction A ; 2018 a la direction B ; ... ; 2021 a la direction E.

Question 5

Des nombres sont inscrits sur un tableau d'école. Je choisis au hasard deux de ces nombres, a et b, je les efface du tableau et je les remplace par le seul nombre $a + b - 1$. Je répète ces opérations jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul nombre au tableau.

a) Si les nombres inscrits sur le tableau au départ sont 5, 10 et 3, quel sera le dernier nombre restant au tableau ? Dépendra-t-il de l'ordre dans lequel je les choisirai ?

b) Si les nombres inscrits sur le tableau au départ sont 1, 2, 3..., 2021, quel sera le dernier nombre restant au tableau ?

Solution de Thomas Claessens

a) Il y a trois façons de choisir les nombres :

   1) $5 + 10 - 1 = 14$, puis $14 + 3 - 1 = 16$.
   2) $5 + 3 - 1 = 7$, puis $7 + 10 - 1 = 16$.
   3) $10 + 3 - 1 = 12$, puis $12 + 5 - 1 = 16$.

   Pour avoir le dernier nombre du tableau, je dois additionner tous ces nombres et soustraire le (nombre de nombres -1). On a bien : $10 + 3 + 5 - (3 - 1) = 16$.

b) Je dois donc calculer $1 + 2 + 3 + \cdots + 2021 - (2021 - 1)$. La somme des n premiers nombres vaut n multiplié par $\left(\frac{n}{2} + 0{,}5\right)$. Donc si $n = 2021$, on a $1+2+3+\cdots+2021 = 2021 \cdot 1011 = 2\,043\,231$. Le dernier nombre du tableau sera $2\,043\,231 - 2020 = 2\,041\,211$.

Questions de la finale Midi 2021

Question 1

Un triplet de nombres réels strictement positifs $(x\,;y\,;z)$ *est* korek *s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

$$xyz > 1 \quad \text{et} \quad x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

a) *Le triplet* $\left(4\,;4\,;\dfrac{1}{8}\right)$ *est-il korek ?*

b) *Si* $x = 2021$ *et* $y = \dfrac{1}{2021}$, *existe-t-il un nombre* z *tel que* $(x\,;y\,;z)$ *soit korek ?*

c) *Existe-t-il des triplets* $(x\,;y\,;z)$ *koreks si* $x = 1$ *?*

d) *Existe-t-il des triplets* $(x\,;y\,;z)$ *koreks avec* $x = y = z$ *?*

e) *Pour quelle(s) valeur(s) de* x *le triplet* $\left(x\,;\dfrac{1}{2x}\,;\dfrac{1}{2x}\right)$ *est-il korek ?*

Solution de Clémence De Veuster

a) $\left(4; 4; \frac{1}{8}\right)$ est korek puisque la 1re condition s'écrit $2 > 1$ et la 2e s'écrit $\frac{65}{8} < \frac{17}{2}$.

b) Remarquons que $y = \frac{1}{x}$. La 1re condition s'écrit $x \cdot \frac{1}{x} \cdot z > 1$, soit $z > 1$. La 2e condition s'écrit $x + \frac{1}{x} + z < \frac{1}{x} + x + \frac{1}{z}$, soit $z < \frac{1}{z}$. Comme $z > 0$, on a $z^2 < 1$ et $z < 1$. Les deux conditions sont incompatibles, donc il n'existe pas de triplet korek avec $y = \frac{1}{x}$.

c) Si $x = 1$, on obtient $yz > 1$ pour la 1re condition et $yz < 1$ pour la 2e condition. C'est incompatible. Il n'existe pas de triplet korek avec $x = 1$.

d) La 1re condition s'écrit $x^3 > 1$ et la 2e condition $x^2 < 1$. C'est incompatible. Il n'existe pas de triplet $(x; x; x)$ korek.

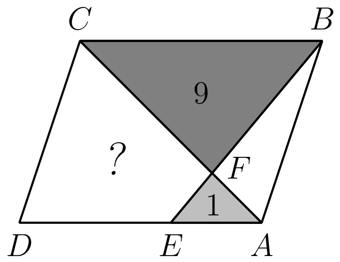
e) La 1re condition s'écrit $\frac{x}{4x^2} > 1$, soit $x < \frac{1}{4}$ puisque $x > 0$. La 2e condition s'écrit $\frac{2x^2+2}{2x} < \frac{1}{x} + 2x + 2x$, soit $x^2 < 4x^2$ ou encore $1 < 4$. Le triplet $\left(x; \frac{1}{2x}; \frac{1}{2x}\right)$ est korek dès que $x \in \left]0; \frac{1}{4}\right[$.

Question 2

Comme sur la figure ci-contre, le point F est intérieur au parallélogramme $ABCD$, sur sa diagonale $[AC]$, et le point E est l'intersection de BF avec AD. Les aires des triangles ombrés sont $\mathscr{A}(BCF) = 9$ et $\mathscr{A}(AEF) = 1$.

a) *Que vaut* $\dfrac{|AF|}{|AC|}$ *?*

b) *Que vaut* $\mathscr{A}(CDEF)$ *?*



Solution de Akram Zakine

a) Le triangle BCF a une aire 9 fois supérieure à celle du triangle AEF et $BC//AE$. Ainsi, par Thalès, les côtés du triangle BCF sont trois fois plus longs que ceux du triangle AEF.

$$\frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|AF|}{|AF| + |FC|} = \frac{|AF|}{|AF| + 3|AF|} = \frac{|AF|}{4|AF|} = \frac{1}{4}$$

b) Puisque les triangles BCF et ABF ont une même hauteur pour des bases de rapport 3, $\mathscr{A}(ABF) = \frac{1}{3}\mathscr{A}(BCF) = 3$. Ainsi, $\mathscr{A}(ABC) = 12$ et $\mathscr{A}(ACD)$ aussi puisque la diagonale d'un parallélogramme coupe celui-ci en deux triangles isométriques. On peut dès lors conclure :

$$\mathscr{A}(CDEF) = \mathscr{A}(ACD) - \mathscr{A}(AEF) = 12 - 1 = 11$$

Question 3

An dit à Mu : « Si tu me donnes 13 de tes cartes d'invitation, j'en aurai 3 fois autant que toi. » Mu répond : « Si, au lieu de cela, tu me donnes 17 de tes cartes, c'est moi qui en aurai 3 fois autant que toi. »

a) *Combien de cartes portent An et Mu ?*

b) *Se peut-il qu'en se donnant 13 et 17 cartes, An et Mu en aient 4 fois autant l'un que l'autre, au lieu de 3 fois ?*

c) *Quel est le plus grand naturel n tel qu'en se donnant 13 et 17 cartes, An et Mu puissent en avoir n fois autant l'un que l'autre ?*

Solution de Mélanie Tarin

a) La phrase dite par An peut se traduire en équation par $A+13=3(M-13)$ où A représente le nombre de cartes que possède An et M le nombre de cartes que possède Mu.

La phrase dite par Mu peut, quant à elle, se traduire en équation par $M+17=3(A-17)$.

Ces deux équations forment un système qui équivaut à :

$\begin{cases} A=3M-39-13 \\ M=3A-51-17 \end{cases} \iff \begin{cases} A=3M-52 \\ M=3(3M-52)-68 \end{cases} \iff \begin{cases} M=9M-156-68 \\ A=3M-52 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 8M=224 \\ A=3M-52 \end{cases} \iff \begin{cases} M=28 \\ A=3\cdot 28-52 \end{cases}$

Par conséquent, An possède 32 cartes et Mu 28.

b) Vérifions s'il est possible que An et Mu aient 4 fois autant de cartes l'un que l'autre en se donnant 13 et 17 cartes.

Résolvons le système :

$\begin{cases} A+13=4(M-13) \\ M+17=4(A-17) \end{cases} \iff \begin{cases} A=4M-52-13 \\ M=4A-68-17 \end{cases} \iff \begin{cases} A=4M-65 \\ M=4(4M-65)-85 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} M=16M-260-85 \\ A=4M-65 \end{cases} \iff \begin{cases} 15M=345 \\ A=4M-65 \end{cases} \iff \begin{cases} M=23 \\ A=4\cdot 23-65 \end{cases}$

Par conséquent, An possède 27 cartes et Mu 23.

c) Recherchons le plus grand naturel n tel que le système

$$\begin{cases} A+13=n(M-13) \\ M+17=n(A-17) \end{cases}$$

aient des solutions naturelles.

En regardant la 1re équation, il faut que $M-13$ soit le plus petit possible pour que n soit le plus grand possible. La plus petite valeur de $M-13$ est 1, donc $M=14$.

De même, grâce à la 2e équation, on déduit que $A-17$ doit être égal à 1 pour que n soit le plus grand possible. Donc $A=18$.

Pour $M=14$ et $A=18$, l'équation $A+13=n(M-13)$ devient $18+13=n(18-17)$, ce qui donne $n=31$.

Et la 2e équation $M+17=n(A-17)$ devient $14+17=n(18-17)$, d'où $n=31$.

Par conséquent, le plus grand naturel n tel qu'en se donnant 13 et 17 cartes, An et Mu puissent en avoir n fois autant que l'autre est 31.

Question 4

> *a) Pour quels naturels n le nombre $(n-7)\times(n-11)$ est-il un naturel premier ?*
>
> *b) Pour quels naturels n le nombre $n^3-8n^2+20n-13$ est-il un naturel premier ?*

Solution de Robin Antoine

(a) Puisque $(n-7)\times(n-11)$ est positif (s'agissant d'un nombre premier), les facteurs $n-7$ et $n-11$ doivent être de même signe. Distinguons le cas où ils sont tous les deux positifs du cas où ils sont tous les deux négatifs.

Cas 1 Si $n-7$ et $n-11$ sont positifs, alors l'un d'eux doit être égal à 1, sinon leur produit ne serait pas premier. Ainsi, n doit être égal à 8 ou à 12. Cependant, le cas $n=8$ ne convient pas puisqu'alors $n-11<0$. Le cas $n=12$ convient cependant, car $(12-7)\times(12-11)=5\times 1=5$ qui est bien un nombre premier.

Cas 2 Si $n-7$ et $n-11$ sont négatifs, alors on transforme l'expression $(n-7)\times(n-11)$ en $(7-n)\times(11-n)$ qui est positive. Comme ci-dessus, l'un d'eux doit être égal à 1. Ainsi, n doit être égal à 6 ou à 10. Cependant, le cas $n=10$ ne convient pas puisqu'alors $7-10<0$. Le cas $n=16$ convient cependant, car $(6-7)\times(6-11)=(-1)\times(-5)=5$ qui est bien un nombre premier.

Finalement, $(n-7)\times(n-11)$ est un nombre premier uniquement si $n=6$ ou $n=12$.

(b) On a la factorisation suivante :

$$\begin{aligned} n^3-8n^2+20n-13 &= (n^3-7n^2+13n)-(n^2-7n+13) \\ &= n(n^2-7n+13)-(n^2-7n+13) \\ &= (n-1)(n^2-7n+13) \end{aligned}$$

Le cas $n=0$ donne -13 qui n'est pas un nombre premier.

Le cas $n=1$ donne 0 qui n'est pas un nombre premier.

Le cas $n=2$ donne 3 qui est bel et bien un nombre premier.

Pour tout $n>2$ respectant l'énoncé, on a forcément $n^2-7n+13=1$ de sorte que le produit $(n-1)(n^2-7n+13)$ ne soit ni composé ni négatif (car $n-1$ serait alors un naturel supérieur à 1).

On a donc $n^2-7n+13=1 \iff n^2-7n+12=0$ c'est-à-dire $n=3$ ou $n=4$.

Il reste à s'assurer qu'ils vérifient l'énoncé.

Le cas $n=3$ donne 2, qui est bien premier.

Le cas $n=4$ donne 3, qui est bien premier.

Dès lors, seules trois valeurs sont possibles : $n=2$, $n=3$ ou $n=4$.

Questions de la finale Maxi 2021

Question 1

a) Pour quels nombres naturels n le nombre $n^4 - 20n^2 + 75$ est-il un naturel premier ?

b) Pour quels nombres naturels n le nombre $n^4 - 3n^2 + 9$ est-il un naturel premier ?

Solution de Quentin Dusart

a) Puisque $n^4 - 20n^2 + 75 = (n^2 - 5)(n^2 - 15)$, l'un de ces deux facteurs vaut forcément 1 ou -1. Ainsi $n^2 = 6$, 4, 16 ou 14 et donc $n = 2$ ou 4. En injectant ces valeurs dans le polynôme de départ, on obtient bien le nombre premier 11 dans chacun des deux cas.

b) Puisque $n^4 - 3n^2 + 9 = (n^2 + 3n + 3)(n^2 - 3n + 3)$, l'un de ces deux facteurs vaut forcément 1 ou -1.

En égalant un des facteurs à -1, on obtient une équation du second degré sans solution.

Si $n^2 + 3n + 3 = 1$, les solutions de cette équation sont négatives et donc non naturelles.

Si $n^2 - 3n + 3 = 1$, les solutions de cette équation sont 1 et 2. En injectant ces valeurs dans le polynôme de départ, on obtient bien les nombres premiers 7 et 13.

Question 2

Un supermarché expose du chocolat en empilant les boites en une construction à p étages. Chaque étage a une forme rectangulaire et possède une boite en moins que l'étage au-dessous, tant dans la longueur que dans la largeur.

a) Si le dernier étage (l'étage supérieur), de rang p, est composé de m rangées de n boites chacune, exprimer le nombre total S de boites de la construction en fonction de m, n et p, sous la forme la plus simplifiée possible.

b) Quelle est la plus grande valeur possible de S si $mn = 6$ et $p = 10$?

Solution de Samuel Dubois

a) $S = \sum_{i=0}^{p-1}(m+i)(n+i) = \sum_{i=0}^{p-1}\left(mn + (m+n)i + i^2\right) = mnp + (m+n)\sum_{i=0}^{p-1} i + \sum_{i=0}^{p-1} i^2$
$= mnp + (m+n)\frac{p(p-1)}{2} + \frac{p(p-1)(2p-1)}{6}$.

b)

m	n	$m+n$	
1	6	7	$\to$ max
2	3	5	$\to$ min
3	2	5	$\to$ min
6	1	7	$\to$ max

Donc : $S_{\text{max}} = 60 + 7 \cdot 45 + 285 = 660$.

Question 3

Une session d'examens est organisée en sixième année à l'Institut Saint-Eddy-Merckx. Le premier jour, les E élèves de sixième année passent un examen. Ils sont répartis dans L locaux, avec L non nul ; chaque local contient un nombre différent d'élèves, au moins trois. Malheureusement, des tricheurs sont détectés. Ils sont exclus du deuxième examen, auquel participent, le jour suivant, tous les autres élèves. Ce deuxième examen est organisé dans un certain nombre non nul de locaux ; cette fois encore, chaque local contient un nombre différent d'élèves, au moins trois. De plus, les organisateurs parviennent à satisfaire la condition suivante : deux élèves ayant participé au premier examen dans un même local ne participent jamais au second examen dans le même local l'un que l'autre.

a) Si $E = 12$ et $L = 3$, les conditions ci-dessus déterminent le nombre de tricheurs détectés ; combien sont-ils ?

b) Dans le cas général, montrer qu'au moins $2L + 3$ tricheurs sont détectés.

c) À quelle(s) condition(s) sur E et L est-il possible qu'exactement $2L + 3$ tricheurs soient détectés ?

Solution inspirée de celles de Emilhan Dürrüoglu et Tim Leyers

a) La seule répartition possible de 12 élèves dans 3 locaux, avec des nombres d'élèves tous distincts et au moins égaux à 3, est $12 = 3 + 4 + 5$.

Si deux élèves ayant participé au 1^er^ examen dans un même local ne participent jamais au 2^e^ examen dans un même local, alors on peut avoir au plus un élève de chaque local du 1^er^ examen dans le local avec le plus d'élèves lors du 2^e^ examen. Il y avait 3 locaux au 1^er^ examen, donc le nombre maximal d'élèves dans un local lors du 2^e^ examen est 3. C'est aussi le nombre minimal d'élèves dans un local en général, donc il existe un seul local de 3 élèves pour le 2^e^ examen, et $12 - 3 = 9$ tricheurs ont été détectés lors du 1^er^ examen.

b) Le nombre de tricheurs est minimal lorsque le nombre d'élèves au 1^er^ examen est minimal (en fonction de L) et le nombre d'élèves au 2^e^ examen est maximal (en fonction de L).

Soit E le nombre minimal d'élèves au 1^er^ examen, en fonction de L. Compte tenu des contraintes, on obtient

$$E = \underbrace{3 + 4 + 5 + \cdots + (L+1) + (L+2)}_{L \text{ locaux}\to L \text{ termes}} = \frac{(L+2)(L+3)}{2} - 3$$

Soit E' le nombre maximal d'élèves au 2^e^ examen, en fonction de L. Comme il y a au moins 3 et au plus L élèves dans chaque local, on obtient

$$E' = \underbrace{3 + 4 + 5 + \cdots + (L-1) + L}_{L-2 \text{ termes}} = \frac{L \cdot (L+1)}{2} - 3$$

Le nombre minimal de tricheurs est donc

$$\begin{aligned} E - E' &= \frac{(L+2)(L+3)}{2} - 3 - \left(\frac{L \cdot (L+1)}{2} - 3\right) \\ &= \tfrac{1}{2}L^2 + \tfrac{5}{2}L + \tfrac{6}{2} - 3 - \tfrac{1}{2}L^2 - \tfrac{1}{2}L + 3 \\ &= 2L + 3 \end{aligned}$$

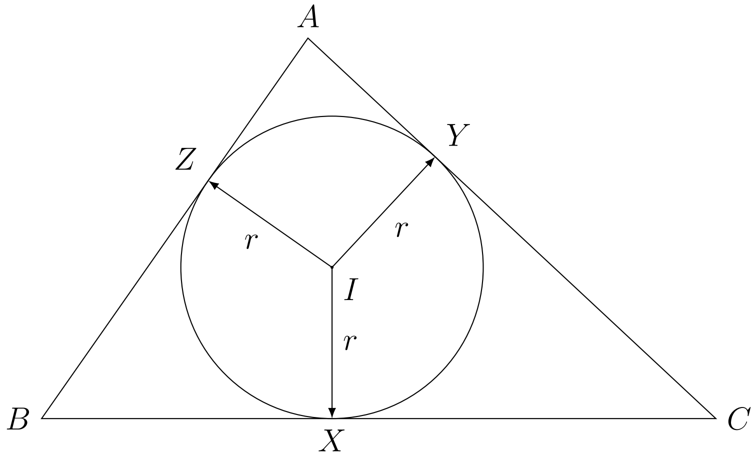
c) Tout d'abord il faut avoir $L \geq 3$ pour qu'il reste au moins un local lors du 2^e^ examen. De plus, il faut avoir exactement $E = \frac{(L+2)(L+3)}{2} - 3 = \frac{(L+5)L}{2}$ élèves le 1^er^ jour, et les L locaux, notés $C_1, \ldots, C_L$, contiennent $3, 4, \ldots, L+2$ élèves.

Réciproquement, si $E = \frac{(L+5)L}{2}$ et $L \geq 3$, on peut trouver une configuration pour le 2^e^ jour. Il suffit que deux élèves aient triché dans chaque local, sauf dans les locaux C_{L-1} et C_L, où respectivement 3 et 4 élèves ont triché ; il y a donc bien $2(L-2) + 3 + 4 = 2L + 3$ tricheurs. Les $L - 2$ locaux $D_1, \ldots, D_{L-2}$ du 2^e^ examen sont constitués comme suit : les $L - 2$ élèves restants de chacun des trois locaux C_{L-2}, C_{L-1}, C_L sont distribués, 1 par nouveau local. Puis on répartit les i élèves restants du local C_i ($1 \leq i < L - 2$) dans les nouveaux locaux $D_1, \ldots, D_i$. On vérifie que toutes les conditions sont respectées, avec notamment $L + 1 - i$ élèves regroupés dans le local D_i ($1 \leq i \leq L - 2$).

Question 4

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r est inscrit au triangle ABC. Les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ sont respectivement de longueurs a, b, c et tangents à $\mathscr{C}$ aux points X, Y et Z. Quelle est la norme du vecteur $a\,\overrightarrow{IX} + b\,\overrightarrow{IY} + c\,\overrightarrow{IZ}$?

Solution inspirée de celle de Samuel Dubois



Nous avons $IX \perp BC$, $IY \perp CA$ et $IZ \perp AB$, car la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon passant par le point de contact.

Soit $A'B'C'$ l'image du triangle par une rotation d'un quart de tour (autour de I) ; alors, $IX//B'C'$, $IY//C'A'$ et $IZ//A'B'$. En choisissant le sens de la rotation, nous pouvons supposer que $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{IX}$ sont de même sens.

Comme $\left\|\overrightarrow{B'C'}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = a$ et que $\left\|\overrightarrow{IX}\right\| = r$, nous avons alors $a\overrightarrow{IX} = r\overrightarrow{B'C'}$; de même, $b\overrightarrow{IY} = r\overrightarrow{C'A'}$ et $c\overrightarrow{IZ} = r\overrightarrow{A'B'}$.

Dès lors,

$$a\overrightarrow{IX} + b\overrightarrow{IY} + c\overrightarrow{IZ} = r\overrightarrow{B'C'} + r\overrightarrow{C'A'} + r\overrightarrow{A'B'} = r\left(\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{A'B'}\right) = r\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0},$$

et la norme de ce vecteur est nulle.

Liste des donateurs

Au nom des lauréats, la Commission Olympiade tient à remercier chaleureusement les Ministres, les institutions, les associations ainsi que les sociétés commerciales qu'elle a l'honneur de compter parmi les donateurs de cette 46e édition de l'OMB. L'intérêt et le soutien, sans cesse renouvelés, que ces « sponsors » portent à l'organisation de l'OMB est un gage du sérieux de celle-ci. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre plaisir de récompenser en leurs noms nos finalistes.

La Fédération Wallonie-Bruxelles

Mme Caroline Désir, Ministre de l'Éducation en FWB
Mme Valérie Glatigny, Ministre de l'Enseignement Supérieur en FWB
M. Elio Di Rupo, Ministre-Président du Gouvernement Wallon

M. Hervé Jamar, Gouverneur de la Province de Liège
M. Denis Mathen, Gouverneur de la Province de Namur
M. Jean-Marc Van Espen, Député-Président du Collège Provincial de Namur
Mme Isabelle Kibassa-Maliba, Députée provinciale en charge de l'Enseignement en Province du Brabant Wallon
M. Pascal Lafosse, Député provincial en charge de l'Enseignement en Province de Hainaut
Mme Geneviève Lazaron, Députée provinciale en Province de Namur
M. Amaury Alexandre, Député provincial en Province de Namur
M. Richard Fournaux, Député provincial en Province de Namur

Mme Annemie Schaus, Rectrice de l'ULB
M. Philippe Dubois, Recteur de l'UMons

M. Olivier Markowitch, Doyen de la faculté des sciences de l'ULB
M. Pascal Poncin, Doyen de la faculté des sciences de l'ULiège
M. Enrico Vitale, Doyen de la faculté des sciences de l'UCLouvain
M. Christian Michaux, Doyen de la faculté des sciences de l'UMons
M. Robert Sporken, Doyen de la faculté des sciences de l'UNamur

M. Yvik Swan, Président de la Société Mathématique de Belgique

M. Jean-Christophe Deledicq, des Éditions du Kangourou à Paris

M. Pascal Houdard, des Éditions Pôle et Tangente à Combon
M. Xavier Thirionet, Data Center Google Admin Business Partner

Le Safari Parc Monde Sauvage d'Aywaille
Le Domaine des grottes de Han-sur-Lesse
Le musée du Malgré-tout à Treignes
Le Musée Hergé à Louvain-la-Neuve
Le Bastogne War Museum
Le Bois du Cazier de Charleroi
La Maison des Géants de Ath
Le Pôle Muséal de la Ville de Mons

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Et tout particulièrement,

M^{me} Catherine Wuidar, *Space Marketing Manager* à l'Euro Space Center à Transinne qui offre une « Mission Discovery » aux gagnants des trois catégories,

M^{me} Agathe Duca-Combaluzier, Responsable marketing France et Belgique de la firme CASIO qui offre une calculatrice à tous les participants.

ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

LIÈGE université

UCLouvain

S B G

UMONS
Université de Mons

UNIVERSITÉ DE NAMUR

EURO SPACE CENTER

ATH
La Maison
DES GÉANTS

ÉDITIONS
POLE

Wallonie

PÔLE MUSÉAL
Musées et expositions de la Ville de Mons

BASTOGNE WAR MUSEUM

Domaine des Grottes de
han

PRÉHISTOIRE ET ANTIQUITÉ
TREIGNES
MUSÉE DU MALGRÉ-TOUT

Province de Liège

Musée des Beaux Arts

les découvertes de Comblain

MUSÉE HERGÉ

Le Brabant wallon

Google Centres de données

ASBL SBPM e.f.

Avec le soutien de la
Fédération Wallonie - Bruxelles

FÉDÉRATION
WALLONIE-BRUXELLES

Éditeur responsable : Michel Sebille / 156 rue Osseghem / 1080 Molenbeek-Saint-Jean