Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Proclamation des lauréats de la 47e Olympiade Mathématique Belge

Université Libre de Bruxelles

21 mai 2022

La cérémonie de proclamation des résultats de l'Olympiade Mathématique Belge prend traditionnellement ses quartiers dans l'un des centres universitaires de la Fédération Wallonie-Bruxelles. La SBPMef y voit une marque de soutien importante pour le travail inlassable de ses membres — tous bénévoles — au service de l'enseignement des mathématiques.

La SBPMef remercie Monsieur le Professeur Davy PAINDAVEINE, qui a bien voulu honorer la partie académique de la cérémonie en nous présentant : Les mathématiques du hasard et quelques unes de leurs curiosités.

La SBPMef remercie l'Université Libre de Bruxelles pour sa disponibilité et son accueil et en particulier Denis BONHEURE et Samuel FIORINI.

SBPMef... Renseignements pratiques

Siège administratif :	SBPMef Campus UMons, Bâtiment 4 Avenue Maistriau 19 7000 Mons
Secrétariat :	Cristina CARRUANA Tél/Fax : 065.37.33.04 Courriel : `sbpm@sbpm.be`
Compte financier :	IBAN BE26 0000 7280 1429 - BIC BPOTBEB1
Site Internet	`http://www.sbpm.be`
Site de l'OMB	`http://omb.sbpm.be/`

La conférence

Les mathématiques du hasard et quelques unes de leurs curiosités

Davy Paindaveine
Université Libre de Bruxelles
Département de mathématiques et ECARES
https://davy.paindaveine.web.ulb.be//index.html

La SBPMef… vous connaissez ?

La mathématique est un des facteurs de l'essor économique, technique, scientifique et culturel des sociétés. Son implication croissante dans le développement de toutes les activités humaines, la place qu'elle prend par le truchement de l'informatique, en font un outil indispensable à la compréhension du monde.

La mathématique n'est pas seulement un outil au service des autres disciplines. Elle est aussi un art qui a sa vie propre et son histoire, avec les problèmes épistémologiques qu'elle suscite. Par là, elle a une valeur culturelle incontestable. D'où l'importance de l'objectif que s'est fixé la SBPMef.

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française est née en 1974 à la suite d'une restructuration linguistique de la Société Belge des Professeurs de Mathématique créée elle-même en 1953. Son but principal est de contribuer à la promotion et à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique.

Cette société s'est constituée en une a.s.b.l. qui tend à représenter l'ensemble des professeurs de mathématique de la partie francophone du pays. Elle rassemble en effet des enseignants de tous les réseaux (officiel, libre, communal et provincial) et de tous les niveaux d'enseignement (instituteurs, AESI, AESS, professeurs de Haute École ou d'Université).

Des inspecteurs, des conseillers pédagogiques et des chercheurs participent régulièrement à ses activités. Regroupant ainsi différentes forces de l'enseignement de la mathématique, la SBPMef peut s'affirmer comme un représentant privilégié des professeurs de mathématique auprès du (ou des) Ministère(s) qui ont en charge l'Éducation, la Recherche et la Formation dans notre Fédération Wallonie-Bruxelles ainsi qu'auprès de divers organismes concernés par l'enseignement des mathématiques. Elle peut ainsi promouvoir, et le cas échéant, défendre valablement sa conception d'un enseignement assurant une large place au développement des capacités créatrices des élèves.

Le nombre de membres de la SBPMef oscille autour de 600, tous professeurs de mathématique en Fédération Wallonie-Bruxelles. Son conseil d'administration comprend 24 membres élus qui se partagent l'organisation des activités principales de la société.

La SBPMef a participé à la création de la *Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs* (la CAPP) en Communauté française de Belgique. Elle tient également sa place au niveau de la Communauté mathématique internationale ; elle est membre fondateur de la *Fédération Européenne des Associations de Professeurs de Mathématiques* (la FEAPM) et de la récente Fédération francophone des associations pour l'enseignement des mathématiques (FFAEM). Elle est aussi membre du Comité international des Jeux mathématiques (CIJM).

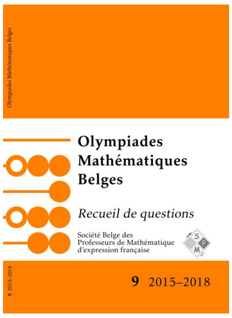
Épinglons un important travail de publications, certaines périodiques, d'autres plus ponctuelles, notamment des dossiers d'exploration didactique destinés à aider à la conception et à l'animation de l'enseignement de la mathématique.

La SBPMef organise également plusieurs compétitions de même que la participation de nos élèves aux olympiades internationales. L'organisation de l'Olympiade Mathématique pour environ 26000 étudiants en Communauté française (éliminatoires dans les établissements, demi-finales régionales et finale communautaire) ne serait possible sans la participation bénévole d'équipes régionales particulièrement dynamiques. Nos meilleurs étudiants participent à l'Olympiade Mathématique Internationale ainsi qu'à l'Olympiade du Benelux, mais également à l'EGMO pour les filles.

Enfin, la Société organise chaque année un Congrès qui se réunit trois jours fin août alternativement dans des locaux de l'un de nos trois principaux réseaux d'enseignement : conférences, exposés, ateliers et expositions sont au menu.

Depuis 2004, la Société facilite la participation de classes de l'enseignement fondamental et du premier degré au *Rallye Mathématique transalpin.*

Les brochures OMB



Les recueils des anciennes questions des Olympiades ont été régulièrement publiés par la SBPMef. Actuellement les brochures *Olympiades Mathématiques Belges – Tomes 6, 7 et 9*, collationnées par Pascal Dupont, Benoit Baudelet et Brigitte Bonnewyn sont disponibles. Elles reprennent toutes les questions posées lors des deux premières étapes des Olympiades Belges des années 2003 à 2010 et 2015 à 2018, ainsi que les questions des finales. Le Tome 10 sortira quant à lui sous peu.

Que ce soit pour les miNi, les miDi ou les maXi, les questions ont été regroupées par matière et classées selon un ordre de difficulté croissante. On y trouve : Arithmétique et Algèbre, Géométrie, Logique, Analyse combinatoire et Probabilités et Problèmes divers.

La SBPMef vous invite à acquérir ces livres à la fois comme textes de référence pour une préparation à l'Olympiade elle-même, mais également comme recueils d'exercices non triviaux d'application des notions mathématiques enseignées dans les classes.

Les tomes 6 et 7 sont vendus au prix de 6 € (4 € pour les membres), le tome 9 est vendu au prix de 8 € (5 € pour les membres). Des réductions sont accordées pour l'achat de plusieurs tomes. L'ouvrage « Clés pour les olympiades » est également disponible.

Pour les frais de port ou pour les conditions particulières d'achat par quantité, consultez notre secrétaire Cristina au 065.37.33.04 ou par courrier électronique à l'adresse `sbpm@sbpm.be`.

L'Olympiade Mathématique Belge

C'est en 1976, à l'initiative du Professeur Buekenhout (ULB), que la SBPMef a créé une épreuve annuelle : l'Olympiade Mathématique Belge (OMB). Cette extraordinaire aventure s'est poursuivie grâce au formidable travail fourni par l'importante équipe de bénévoles qui gèrent cette compétition – tout à fait amicale – aussi bien sur le plan administratif que sur le plan scientifique, ainsi que grâce à l'enthousiasme des élèves participants et de leurs professeurs qui les incitent à s'inscrire et qui les motivent.

Elle est ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire francophone belge ou luxembourgeois (tous réseaux, tous niveaux). Dès 1977, elle se subdivise en deux catégories « Mini » et « Maxi » respectivement réservées aux élèves des trois classes inférieures et des trois classes supérieures. En 1996, une catégorie intermédiaire a été créée et désormais, l'Olympiade est subdivisée en trois catégories : « Mini », « Midi » et « Maxi », destinées respectivement aux élèves des 1$^{\text{er}}$, 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ degrés de l'enseignement secondaire. Les participants trouvent ainsi dans le questionnaire qui leur est destiné une source de matières qui les ciblent au mieux.

Le jury national est composé de professeurs des enseignements secondaire, supérieur et universitaire ainsi que d'inspecteurs et de conseillers pédagogiques. Il a en charge la responsabilité générale de l'organisation de l'Olympiade et est secondé matériellement par le secrétariat de la SBPMef qui se charge des expéditions. Le jury a plus particulièrement la lourde charge de la création et de la rédaction précise des questions des diverses compétitions.

L'*éliminatoire* se déroule dans chaque école inscrite sous la responsabilité d'un professeur qui réceptionne, début janvier, les questionnaires ; il est chargé de la bonne organisation de l'éliminatoire au sein de son école. Le grand nombre d'inscrits impose de recourir à des questionnaires à choix multiples pour cette éliminatoire (actuellement, une réponse valable à trouver parmi cinq proposées). Le jury s'efforce néanmoins de donner aux questions un caractère « peu scolaire » de façon à obliger les élèves à faire preuve de leur capacité à appliquer leurs connaissances et à les transposer à des situations nouvelles. La durée de l'épreuve, 90 minutes pour répondre à 30 questions, les oblige à traiter d'abord les questions les plus accessibles. Afin d'éviter les choix au hasard, une réponse erronée à une question est pénalisée par rapport à une absence de réponse. De plus, le jury prévoit toujours que quelques questions ne soient pas à choix multiples, mais nécessitent une réponse qui est un nombre entier compris entre zéro et 999. Aidé de grilles de correction extrêmement précises, le professeur responsable organise dans son établissement la correction de cette première épreuve. Il envoie les résultats à son secrétaire régional. Il y a actuellement dix secrétaires régionaux (Arlon, Bruxelles, Charleroi, Liège, Louvain-La-Neuve, Luxembourg, Marche-en-Famenne, Mons, Namur et Tournai) qui ont en charge de lourdes responsabilités. Ce sont eux qui sélectionnent les demi-finalistes sur base des résultats communiqués par les écoles. Ils rédigent les statistiques année par année pour leur région et expédient ces données dans les écoles. Ils convoquent les demi-finalistes et organisent les demi-finales.

Les épreuves de la *demi-finale* sont du même type (la plupart des questions à choix multiples et quelques questions dont la réponse est un nombre entier compris entre 0 et 999) que lors des éliminatoires, mais les questions présentent un degré de difficulté légèrement supérieur. Enfin, les responsables régionaux et leurs équipes corrigent les épreuves et transmettent les résultats au secrétariat national. C'est ensuite au jury national qu'il appartient de déterminer quels seront les *finalistes*. Ceux-ci sont invités en un lieu central (en principe Namur) et travaillent pendant 4 heures à la résolution de problèmes difficiles. Il est conseillé aux finalistes de mettre par écrit toutes les démarches qu'ils entreprennent car le jury valorise les idées intéressantes, y compris celles dont il n'était pas évident *a priori* qu'elles n'aboutiraient pas. Le jury national corrige ces épreuves finales et choisit les lauréats. Si la compétition a ainsi successivement un caractère local, puis régional et enfin communautaire, tous les élèves sont néanmoins confrontés aux mêmes difficultés puisque toutes les questions sont préparées par le même jury national.

Depuis quelques années, tous les finalistes sont invités à la proclamation solennelle des résultats et y reçoivent un diplôme de participation ainsi que de nombreux prix. La SBPMef est à ce niveau aidée par les nombreux mécènes qui soutiennent la compétition. Des prix spéciaux sont en outre attribués aux élèves de 1$^{\text{re}}$, 3$^{\text{e}}$ et 5$^{\text{e}}$ années parvenus en finale et ayant fait montre d'un talent mathématique précoce et prometteur. Le prix Willy Vanhamme récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues.

Le but poursuivi par la SBPMef en organisant l'Olympiade est triple : intéresser les élèves à l'activité mathématique par le biais d'une compétition, d'un grand jeu qui les passionne ; mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation mathématique des élèves en proposant des problèmes qui font appel à la créativité, à l'imagination, aux capacités réelles de raisonnement ; fournir aux professeurs un choix d'exercices non élémentaires, originaux, d'un type différent de ceux figurant dans la plupart des manuels.

L'impact de l'Olympiade sur l'enseignement n'est pas négligeable. On constate en effet que nombre d'enseignants et d'auteurs de manuels réutilisent des questions posées à l'Olympiade dans le cadre de leurs cours.

En 2022, les nombres de participation s'établissent comme suit :

	Éliminatoires	Demi-finales	Finale	Lauréats
Mini	12597	806	39	14
Midi	6457	497	39	15
Maxi	5287	515	40	15
Total	24341	1818	118	44

Jury de l'Olympiade

Responsable national : Michel SEBILLE

Trésorier : Marc DE NEEF

Secrétariats régionaux :

Arlon :	Xavier HAINAUT
Bruxelles :	Vincent DE CLERCK
Charleroi :	Valérie BAS
Liège :	Yvan HAINE
Louvain-la-Neuve :	Jean-Pierre TURPIN
Luxembourg :	Mike DOSTERT
Marche-en-Famenne :	Christelle BOULANGER
Mons :	Stéphanie BRIDOUX
Namur :	Pascal HENRY
Tournai :	Lawrence DUFRANNE et Naomi HUGÉ

Jury national :

Président du jury : Pascal DUPONT

Secrétaire du jury : Benoit BAUDELET

Rédactrice des questionnaires : Lise PONSELET

Membres du Jury : Benoit BAUDELET, Andrée BOGAERTS, Francis BUEKENHOUT, Sylvain COURTOIS, Vincent DALOZE, Géry DEBONGNIE, Brigitte DE CONINCK, Jean-Paul DOIGNON, Marc DE NEEF, Pascal DUPONT, Bernard FELTEN, Dimitri FOUCART, Nicolas FRANCO, Yvan HAINE, Lionelle LAMY, Jules MIÉWIS, Nicole MIÉWIS, Éveline MOITROUX, Philippe NIEDERKORN, Lise PONSELET, Pascal RADOUX, Michel SEBILLE, Hugues VERMEIREN, Pascal ZEIHEN

Membres correspondants : Vidal AGNIEL, Martine DEVILLERS, Françoise DUCHÊNE-VALETTE, Pierre-Alain JACQMIN, Dany LEGRAND, Boris MEYNSBRUGHEN, Monique MILCAMPS-WILMET, Nicolas RADU et Yolande ROCH-NOËL

Olympiade Internationale (Belgique) : Gérald TROESSAERT assisté de Philippe NIEDERKORN (sélection et accompagnement) et Nicolas RADU

Olympiade Mathématique du Benelux : Nicolas RADU et François THILMANY

European Girls' Mathematical Olympiad : Michel Sebille

Olympiades Internationales diverses (Grand-Duché de Luxembourg) : Mike Dostert, Bernard Felten, Pierre Haas, Philippe Schram et Pascal Zeihen

Collecte des lots et préparation de la proclamation : Jules Miéwis assisté de Cristina Carruana, Dominique Dumont, Nicole Miéwis et Hugues Vermeiren

Palmarès : Michel Sebille

Préparations aux olympiades internationales : Benoit Baudelet, Corentin Bodart, Hoan-Phung Bui, Quentin Claus, Cédric De Groote, Pascal Dupont, Nicolas Franco, Damien Galant, Xavier Gonze, Rodrigue Haya Enriquez, Pierre-Alain Jacqmin, Savinien Kreczman, Benoît Legat, Simon Lemal, Jean-François Macq, Philippe Niederkorn, Laure Ninove, Cédric Pilatte, Nicolas Radu, Michel Sebille, François Thilmany, Gérald Troessaert, Justin Vast

Les finalistes en pleine action

© Pascal Dupont

Palmarès de la 47e OMB

Lauréats de la Mini-Olympiade 2022

A obtenu le premier prix

1	MENNA Giovanni	2	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud

Ont obtenu un deuxième prix

2	SHI Ryan	2	St John's Intern. School	Waterloo
3	VAN SCHAFTINGEN Augustin	2	Collège du Christ-Roi	Ottignies
4	YANG Changzhi	1	Athénée Robert Catteau	Bruxelles

Ont obtenu un troisième prix

5	PRIGENT Amaury	2	Institut Saint-Boniface	Ixelles
6	MAIRE Arnaud	2	Athénée Royal	Bastogne

Ont obtenu un quatrième prix

7	CLAESSENS Thomas	2	Lycée Saint-Jacques	Liège
	SKVORTSOV Mikhail	1	Athénée Royal	Mons
9	VALKENERS Raphaël	1	Collège Sainte-Véronique	Liège
10	ROGIEST Gaëlle	2	Institut Notre-Dame	Arlon
11	COUNET Mathieu	2	Collège Saint-Hubert	Watermael
	LAHAYE Théo	1	Inst. des Dames de Marie	Woluwe-St-Lambert
	WARNANT Eliot	2	CS St-Benoît St-Servais	Liège
14	MURAT Justin	2	Lycée Jean Monnet	Uccle

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élèves de 1[re] année

BIANCHI CAPART Alice	Athénée Royal Jean Absil	Etterbeek
LAHAYE Théo	Institut des Dames de Marie	Woluwe-St-Lambert
SKVORTSOV Mikhail	Athénée Royal M. Bervoets	Mons
VALKENERS Raphaël	Collège Sainte-Véronique	Liège
WELLENS Julien	Institut Saint-André	Ixelles
YANG Changzhi	Athénée Robert Catteau	Bruxelles

Ont également participé à la finale

AKON Elias	2	Institut Saint-Dominique	Schaerbeek
AVANESOV Harik	1	Athénée de Luxembourg	Luxembourg
DELVAUX Lucas	2	École Technique St-Joseph	Welkenraedt
DEROUAUX Martin	2	Institut Saint-François	Ouffet
DE WALQUE Benjamin	2	Institut de la Vierge Fidèle	Schaerbeek
DOZO Eliott	1	Collège Saint-Roch	Ferrières
ESCHENAUER Camille	2	Athénée Royal Ch. Rogier	Liège
GUO Yihua	1	St John's Intern. School	Waterloo
HAFNER Matthias	2	Collège des Hayeffes	Mont-St-Guibert
HUYGENS Olivia	2	Inst. des S. de Notre-Dame	Anderlecht
LEBRAS Téo	1	Lycée Jean Monnet	Uccle
LEJEUNE Martin	2	Abbaye de Flône	Amay
MICHAUX Adrien	1	Athénée Royal Air-Pur	Seraing
NEPOMUCENO DE GÓES Júlia	2	Lycée Jean Monnet	Uccle
RÄSS Baptiste	1	École d'Argenteuil	Waterloo
RENARD Célia	2	Athénée Royal	Pont-à-Celles
TECHER Nathan	1	Lycée Mater Dei	Woluwe-St-Pierre
THIBAUT Arthur	2	Collège Sainte-Gertrude	Nivelles
VAN OPPENS Justin	2	Lycée Martin V	Louvain-la-Neuve
VAST Alexis	1	C.S. Saint-Benoît	Habay-la-Neuve
ZECH Noé	2	Collège du Christ-Roi	Ottignies
ZHOU Muyang	2	Collège Saint-Pierre	Uccle

Palmarès de la 47e OMB

Lauréats de la Midi-Olympiade 2022

A obtenu le premier prix

1	Antoine Robin	4	Sint-Franciscusinstituut	Brakel

Ont obtenu un deuxième prix

2	Andrian Albescu Stefan	3	École Européenne III	Ixelles
3	Nuyts Samuel	3	École Européenne III	Ixelles
4	De Veuster Clémence	4	Athénée Royal	Hannut

Ont obtenu un troisième prix

5	Dubois Matthieu	4	Lycée Jean Monnet	Uccle
6	Zakine Akram	4	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
7	Caine Maxime	3	Lycée Jean Monnet	Uccle

Ont obtenu un quatrième prix

8	Velz San Diego	3	Bischöfliches Institut	Büllingen
9	Bernabeu Adrian	4	École Européenne III	Ixelles
	Robert Jeanne	4	BIC School	Etterbeek
	Voncken Michèle	4	Lycée Nic-Biever	Dudelange
12	Gonieau Lucien	4	Collège Saint-Julien	Ath
	Tanasa Maia	4	École Européenne II	Bertrange
14	Dürrüoğlu Pierre-Akin	3	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud
15	Grønvald Emilie	3	École Européenne III	Ixelles

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élèves de 3e année

ANDRIAN ALBESCU Stefan	École Européenne III	Ixelles
CAI Zhaohe	Sacré-Cœur de Lindthout	Woluwe-St-Lambert
CAINE Maxime	Lycée Jean Monnet	Uccle
DEBROUX Marguerite	Collège Saint-Michel	Etterbeek
DÜRRÜOĞLU Pierre Akin	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud
GRØNVALD Emilie	École Européenne III	Ixelles
NUYTS Samuel	École Européenne III	Ixelles
VELZ San Diego	Bischöfliches Institut	Büllingen

Ont également participé à la finale

BAGUETTE Nao	3	Institut Saint-Louis	Namur
BLOKS KNEIP Yanis	4	Collège Saint-Hadelin	Visé
BOULANGER Émile	4	Institut Notre-Dame de B-E	Braine-le-Comte
BURTON Lucie	4	Maria Goretti Sekundarschule	Saint-Vith
COCHÉ Léo	3	Comm. Scolaire Sainte-Marie	Namur
CORMIER Faustas	4	École Européenne I	Luxembourg
COSENTINI Leo	3	Athénée Royal Jules Bordet	Soignies
DEMEULDER Eliott	3	Athénée Royal	Nivelles
FLIES Jo	4	Athénée de Luxembourg	Luxembourg
GUIGNARD Thibault	3	Collège Saint-Michel	Etterbeek
HABERKORN Matthieu	4	Collège Saint-Hubert	Watermael-Boitsfort
HOFFMANN Matthieu	4	Lycée du Nord	Wiltz
JOUNIAUX Laure-Line	3	Collège Saint-Augustin	Gerpinnes
LAURANT Célia	4	Institut Saint-Joseph	Carlsbourg
MANDAL Parag	3	Collège Saint-Barthélemy	Liège
MASSIN Noah	4	Comm. Scolaire Saint-Benoît	Habay-la-Neuve
MAZY Arnaud	4	Athénée Royal Air Pur	Seraing
MEHMED Huda-Nur	3	Collège des Étoiles	Haren
NOBILE Tiago	3	Collège Saint-Michel	Etterbeek
PIERRET Nathan	4	Schola Nova	Incourt
TATU-CARAVAN Gabriela	4	École Européenne II	Woluwe-St-Lambert

Palmarès de la 47^{e} OMB

Lauréats de la Maxi-Olympiade 2022

A obtenu le premier prix

1	MARTIN Mathieu	6	Athénée de Luxembourg	Luxembourg

Ont obtenu un deuxième prix

2	d'ANGELO Olivier	6	Athénée Royal Charles Rogier	Liège
3	KYSIL Angelina	6	Lycée de Garçons	Luxembourg
4	CHAKROUNE Sanae	5	Institut des S. de Notre-Dame	Anderlecht
5	COCHÉ Lucien	6	Comm. Scolaire Sainte-Marie	Namur

Ont obtenu un troisième prix

6	CAINE Rodolphe	6	Lycée Jean Monnet	Uccle
7	VITORAC Petar	6	Collège Saint-Pierre	Uccle
8	CHANG Sen Han	6	BIC School	Etterbeek

Ont obtenu un quatrième prix

9	VIERLINCK Robin	6	Collège Da Vinci	Perwez
10	DE FAVEREAU Joachim	6	Lycée Martin V	Louvain-la-Neuve
11	ROTH Pierre	6	Lycée Michel Rodange	Luxembourg
12	OBERREIT Gianluca	6	BIC School	Etterbeek
13	DELHAYE Maxime	6	Collège du Christ-Roi	Ottignies
	FASTENAEKELS Romain	6	Collège Sainte-Marie	Mouscron
	VAN SCHAFTINGEN Benoît	5	Collège du Christ-Roi	Ottignies

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élèves de 5^{e} année

ANCIAUX Adrien	Collège du Christ-Roi	Ottignies
ARONSSON-BROWN August	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
CHAKROUNE Sanae	Institut des Sœurs de Notre-Dame	Anderlecht
MENDELEEV Steve	International School	Luxembourg
VAN SCHAFTINGEN Benoît	Collège du Christ-Roi	Ottignies

Ont également participé à la finale

BANCE Mattéo	6	Collège Sainte-Gertrude	Nivelles
BINI Tom	5	Athénée Royal	Huy
BORTOLUZZI César	5	Lycée Mater Dei	Woluwe-Saint-Pierre
BRYON Gaspard	5	Institut des Frères Maristes	Mouscron
DE WINTER Adrien	6	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud
DIAS Samuel	5	Lycée Classique	Diekirch
GALLAND Lila	6	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
GUILBERT Victor	6	Lycée Vauban	Luxembourg
HÚŠŤAVA Adam	6	École Européenne II	Bertrange
LALOUX Camille	6	Séminaire de Floreffe	Floreffe
MAIRE Elliott	5	Athénée Royal	Bastogne
MARCOUCH Ibrahim	5	Centre Scolaire du Sacré-Cœur	Jette
MOCHKOV Victor	6	Lycée Émile Jacqmain	Bruxelles
NICLAES Félix	6	Athénée Royal	Namur
POLLART Lilou	6	Institut Notre-Dame	Fleurus
PONCÉ Matteo	6	Collège du Christ-Roi	Ottignies
SCHAKAL Rafaël	5	Collège Saint-Pierre	Uccle
TARIN Mélanie	5	Collège du Sacré-Cœur	Charleroi
WAUTERS Arthur	5	Athénée Royal	Arlon
ZULEWSKI Antoine	6	Collège Saint-Joseph	Chênée

Prix Vanhamme 2022

Ce prix récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues.

Le lauréat est

Olivier D'ANGELO

élève de 6^{e} année à l'Athénée Royal Charles Rogier à Liège.
Il reçoit ce prix pour sa résolution de la question maXi 2.

© Pascal DUPONT

Olympiade Mathématique Internationale

Saint-Pétersbourg en Russie a accueilli du 14 au 24 juillet 2021 la 62e Olympiade Mathématique Internationale (OMI). Un total de 619 étudiants (dont 64 filles) issus de 107 pays ont participé à l'épreuve.

Comme c'est le cas depuis plusieurs années maintenant, l'équipe belge était composée de six étudiants (trois néerlandophones et trois francophones), sous la conduite de Bart WINDELS (leader) et de Philippe NIERDERKORN (deputy leader).

L'épreuve consiste en la résolution de six problèmes, chaque problème est coté sur sept points. Lorsque les corrections sont terminées, le jury de l'OMI définit les seuils d'attribution des médailles de la façon suivante : la moitié des participants au plus sont médaillés. Parmi les médaillés, un tiers au plus obtiennent une médaille d'argent et un sixième au plus une médaille d'or. Cette clé de répartition a donné les seuils suivants : médaille de bronze 15/42, médaille d'argent 24/42 et médaille d'or 31/42. De plus, une mention honorable est accordée à chaque concurrent non médaillé ayant obtenu le maximum à une question au moins. À Saint-Petersbourg, 52 médailles d'or, 103 médailles d'argent, 148 médailles de bronze et 98 mentions honorables ont été décernées.

Voici les résultats des participants belges :

Brecht VERBEKEN (nl) : 18 points — médaille de bronze

Dora CHEN (nl) : 14 points — médaille de bronze

Emilhan DÜRRÜOGLU (fr) : 12 points — médaille de bronze

Lukas DAS (nl) : 9 points — mention honorable

Olivier FAYS (fr) : 8 points — mention honorable

Marie DETERME (fr) : 7 points — mention honorable

La tradition veut que l'épreuve comporte deux problèmes dits « faciles », deux problèmes de difficulté moyenne et deux problèmes difficiles pour départager les meilleurs. Un participant originaire de Chine obtient le score parfait de 42 points.

Bien que l'OMI soit une épreuve individuelle, il est inévitable de s'intéresser aux résultats globaux des différents pays. La Belgique se classe au 43e rang (sur 107) d'un officieux classement inter-nations. Le trio de tête est composé de la Chine suivie de la Russie et de la Corée.

La 63e Olympiade Mathématique Internationale sera accueillie par Oslo en Norvège. Elle se tiendra du 6 au 16 juillet 2022.

Pour plus d'informations : `http://www.imo-official.org`

European Girl's Mathematical Olympiad

La participation féminine aux olympiades internationales est faible voire pour certains pays quasiment inexistante. Il s'est ainsi récemment écoulé 16 années sans participation d'une Belge aux OMI jusqu'à ce qu'une participante néerlandophone prenne part à l'édition 2016. Depuis, une participante francophone ou néerlandophone est sélectionnée chaque année et même deux en 2021.

Afin d'encourager une participation féminine à ces compétitions ainsi qu'à des études de mathématiques, il a été décidé d'organiser, à partir de 2012, une compétition réservée exclusivement aux filles. Celle-ci fut baptisée « European Girl's Mathematical Olympiad ».

Cette année, 222 participantes venant de 57 pays se sont affrontées (31 pays européens et 26 pays invités). La Russie a été interdite de participation. La Belgique était représentée par Anne Cao, Dora Chen, Lies Sevenhant, Enya Leroy (participantes), Michel Sebille (leader) et Marie Peeters (deputy leader).

La compétition s'est déroulée à Eger en Hongrie du 6 au 12 avril 2021.

Au niveau du résultat, la Belgique a fini quarante-et-unième sur cinquante-sept. Dora Chen est 45ᵉ, Lies Sevenhant 176ᵉ et Anne Cao 181ᵉ. Dora Chen obtient une médaille d'argent. La compétition individuelle a été remportée par une participante américaine réalisant un score de 42/42. La compétition par équipe est remportée par la Roumanie devant la Bulgarie et la Turquie. L'équipe des USA est en réalité première, mais seules les équipes européennes figurent dans le classement des nations.

Les résultats et énoncés des problèmes sont disponibles sur le site `http://www.egmo.org`
La prochaine édition se déroulera à Portorož en Slovénie.

L'équipe belge célébrant sa médaillée d'argent

Olympiade Mathématique du Benelux

Depuis 2009 est organisée chaque année une olympiade de mathématiques du Benelux, plus connue sous l'acronyme anglais BxMO (Benelux Mathematical Olympiad). Comme la majorité des autres olympiades « régionales » organisées en Europe et ailleurs, elle a pour but de favoriser les contacts entre les pays participants, tout en offrant à quelques étudiants de chacun d'eux la possibilité d'acquérir, dans le cadre d'une compétition internationale, une expérience qui pourra se révéler précieuse pour une éventuelle participation à l'Olympiade Mathématique Internationale (OMI). L'épreuve proprement dite dure 4 h 30 et comporte quatre problèmes, notés chacun sur 7 points.

Le niveau de difficulté est plus élevé que celui des olympiades nationales des pays participants, mais le questionnaire reste plus abordable que celui d'une OMI. Chaque pays peut envoyer une délégation de 10 candidats et de 3 accompagnateurs.

L'édition 2022 a eu lieu en Belgique à Leuven du 29 avril au 1er mai. La délégation belge était composée de cinq étudiants francophones (Rodolphe CAINE, Lucien COCHÉ, Joseph DERAEMAEKER, Pierre-Akin DÜRRÜOĞLU et Mateo MUÑOZ) et de cinq étudiants néerlandophones (Dora CHEN, Jul COMHAIRE, Diederik DANNEELS, Matilda KELLENBERGER et Mathis POPPE) et de trois accompagnateurs : Nicolas RADU, Tijs BUGGENHOUT et François THILMANY.

Les Pays-Bas ont obtenu la première place devant la Suède (invitée), la Belgique et le Luxembourg. Nous avons décroché une médaille d'or (Dora CHEN), une médaille d'argent (Pierre-Akin DÜRRÜOĞLU) et deux médailles de bronze (Lucien COCHÉ, et Mathis POPPE). Il est à noter que les médailles sont attribuées selon des critères identiques à ceux de l'OMI et que le meilleur score est un score parfait (28/28) réalisé par Dora CHEN qui gagne ainsi la compétition individuelle.

N'hésitez pas à consulter le site web `www.bxmo.org`. Vous y trouverez tous les classements, les questions et les solutions à tous les problèmes posés au cours de cette compétition enrichissante.

Conseil d'administration de la SBPMef

Conseil d'administration

Pierre Bolly, Brigitte De Coninck, Jean-Marc Desbonnez, Dominique Dumont, Pascal Dupont, Dimitri Foucart, Renée Gossez-Ketels, Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Dany Legrand, Christian Michaux, Jules Miéwis, Nicole Miéwis, Sarah Ory, René Scrève, Michel Sebille, Gérald Troessaert, Hugues Vermeiren et Sébastien Verspecht.

Bureau exécutif de la Société

Présidente de la SBPMef :	Valérie Henry
Vice-Présidents :	Michel Sebille
	René Scrève
Administrateur délégué :	Christian Michaux
Secrétaire :	Marie-France Guissard
Trésorier :	Christian Michaux

Responsables d'activités

Rédacteur en chef de *Losanges* :	Valérie Henry
Rédacteur de *SBPM-Infor* :	Renée Gossez-Ketels
Responsable du site internet :	Sébastien Verspecht
Responsable Olympiade Nationale :	Michel Sebille
Responsables Olympiade Internationale :	Gérald Troessaert, Philippe Niederkorn et Nicolas Radu
Responsable Olympiade du Benelux :	Nicolas Radu
Responsable European Girl's Mathematical Olympiad :	Michel Sebille
Responsable Rallye Mathématique Transalpin :	Pauline Lambrecht
Présidente de la Commission Congrès :	Dominique Dumont
Représentants de la SBPMef à la CAPP :	René Scrève
Représentante de la SBPMef au CIJM :	Brigitte De Coninck

Questions de la finale Mini 2022

Question 1

Quel est le plus grand nombre premier qui divise $10^{22} + 10^{23} + 10^{24}$?

Solution inspirée de celle de Giovanni Menna

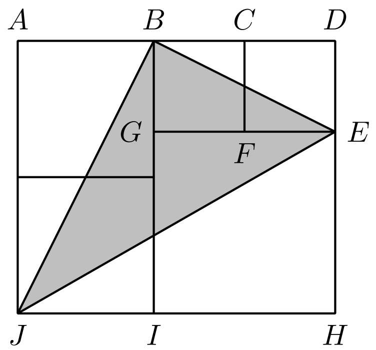
Le plus grand nombre premier divisant $10^{22} + 10^{23} + 10^{24}$ est 37.

En effet, nous pouvons réduire l'expression par mise en évidence et obtenir la décomposition en facteurs premiers :

$$10^{22} + 10^{23} + 10^{24} = 10^{22} \cdot (1 + 10 + 100) = 111 \cdot 10^{22} = 3 \cdot 37 \cdot 2^{22} \cdot 5^{22}$$

Question 2

Le rectangle $AJHD$ est composé de cinq carrés, comme sur la figure ci-dessous. Si la longueur du segment $[BC]$ est 16, quelle est l'aire du triangle ombré BJE ?



Solution inspirée de celle de Nathan Techer

Puisque $|BC| = 16$, $|GE| = 2{\cdot}|BC| = 16$; $|AJ| = 16{+}32 = 48$ et $|AD| = 24{+}16{+}16 = 56$.

L'aire ombrée est donc égale à

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(BJE) &= \mathscr{A}(ADHJ) - \mathscr{A}(ABJ) - \mathscr{A}(BDE) - \mathscr{A}(EHJ) \\
&= |AJ| \cdot |AD| - \tfrac{1}{2}|AB| \cdot |AJ| - \tfrac{1}{2}|BD| \cdot |DE| - \tfrac{1}{2}|HJ| \cdot |EH| \\
&= 48 \cdot 56 - \tfrac{1}{2} \cdot 48 \cdot 24 - \tfrac{1}{2} \cdot 32 \cdot 16 - \tfrac{1}{2} \cdot 32 \cdot 56 \\
&= 2688 - 576 - 256 - 896 \\
&= 960
\end{aligned}$$

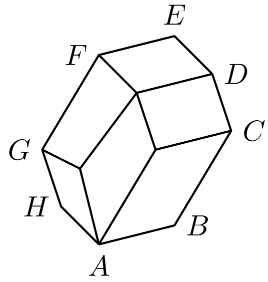
Question 3

L'octogone $ABCDEFGH$ est composé de 6 parallélogrammes, comme indiqué sur la figure imprécise ci-contre.

a) *Le quadrilatère $CDGH$ est-il un parallélogramme ?*

b) *Le quadrilatère $DFHB$ est-il un parallélogramme ?*

c) *Les droites AE, BF, CG et DH sont-elles concourantes, c'est-à-dire passent-elles toutes par le même point ?*



On nomme les trois sommets centraux de sorte que trois des six parallélogrammes se nomment $AHGX$, $DEFY$ et $ABCZ$.

a) On utilise le fait qu'un parallélogramme est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles de même longueur. Puisque $AHGX$ est un parallélogramme, $GH//AX$ et $|GH| = |AX|$. De même $AXYZ$ est un parallélogramme, donc $AX//YZ$ et $|AX| = |YZ|$. Encore une fois, $CDYZ$ est un parallélogramme, $YZ//CD$ et $|YZ| = |CD|$. Ainsi,
$$GH//AX//YZ//CD \quad \text{et} \quad |GH| = |AX| = |YZ| = |CD|.$$
Le quadrilatère $CDGH$ est donc un parallélogramme.

b) Avec le même argument qu'au a), puisque $AHGX$ et $GXYF$ sont des parallélogrammes, $AHFY$ aussi. De même, puisque $ABCZ$ et $CDYZ$ sont des parallélogrammes, $ABDY$ aussi (le quadrilatère $DEFY$ étant un parallélogramme, $ABEF$ également ; ce sera utile dans la sous-question suivante).

Une translation conservant parallélisme et longueur, $t_{\overrightarrow{YA}}(F) = H$, $t_{\overrightarrow{YA}}(D) = B$. Les segments $[FD]$ et $[HB]$ sont donc parallèles de même longueur et $DFHB$ est un parallélogramme.

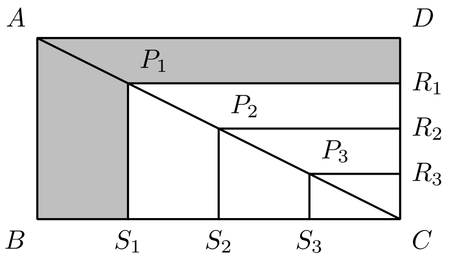
c) Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Du a), on déduit donc que $[CG]$ et $[DH]$ se coupent en leur milieu M. Du b) on déduit donc que M est aussi le milieu de $[FB]$. Comme enfin, on a vu que $ABEF$ est un parallélogramme, M est aussi le milieu de $[AE]$. Les droites AE, BF, CG et DH sont donc concourantes en M.

Question 4

La diagonale $[AC]$ d'un rectangle $ABCD$ est partagée en quatre parties égales par les points P_1, P_2 et P_3, comme sur la figure ci-dessous. Les points R_1, R_2 et R_3 sont les projections orthogonales sur $[CD]$ des points P_1, P_2 et P_3 respectivement. Les points S_1, S_2 et S_3 sont les projections orthogonales sur $[BC]$ des points P_1, P_2 et P_3 respectivement. L'aire du rectangle $ABCD$ vaut 1.

a) Quelle est l'aire du rectangle $CR_1P_1S_1$?

b) Quelle est l'aire du polygone ombré $S_1P_1R_1DAB$?



c) Sur une nouvelle figure, partageons à présent la diagonale $[AC]$ en huit parties égales par de nouveaux points $P_1, P_2, \ldots, P_7$ et construisons les points $R_1, R_2, \ldots, R_7$ et $S_1, S_2, \ldots, S_7$ par le même procédé que dans le cas du partage de la diagonale en quatre. Quelle est maintenant l'aire du polygone $S_1P_1R_1DAB$?

Solution inspirée de celles d'Amaury Pringent et Noé Zech

a) La projection orthogonale gardant identiques les rapports de longueurs, $|R_1C| = \frac{3}{4}|DC|$ et $|C_1C| = \frac{3}{4}|BC|$. Ainsi,

$$\mathscr{A}\,(CR_1P_1S_1) = \frac{3}{4}|DC| \cdot \frac{3}{4}|BC| = \frac{9}{16}|DC| \cdot |BC| = \frac{9}{16} \cdot 1 = \frac{9}{16}.$$

b) L'aire du polygone ombré $S_1P_1R_1DAB$ est donc $1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$.

c) En utilisant le même procédé qu'en a), nous avons

$$\mathscr{A}\,(CR_1P_1S_1) = \frac{7}{8}|DC| \cdot \frac{7}{8}|BC| = \frac{49}{64}|DC| \cdot |BC| = \frac{49}{64}.$$

L'aire du polygone ombré $S_1P_1R_1DAB$ est donc $1 - \dfrac{49}{64} = \dfrac{15}{64}$.

Question 5

Harpagon entasse des pièces d'or dans des sacs de la manière suivante : le premier contient une pièce, le second deux pièces, le troisième trois pièces et Harpagon continue d'augmenter le nombre de pièces par sac d'une unité. Le sac le plus rempli contient n pièces. Ensuite, il ajoute ou retire des pièces en choisissant à chaque fois une des deux règles suivantes :

- *il choisit trois sacs distincts parmi les n sacs ; dans l'un il ajoute une pièce, dans un autre, deux pièces et dans le dernier, trois pièces ;*
- *ou il choisit deux sacs contenant au moins deux pièces chacun ; il retire deux pièces de chacun de ces sacs.*

Très riche, Harpagon dispose de pièces à volonté.

a) *Si $n = 5$, peut-il obtenir 5 sacs de 5 pièces ? Si oui, comment ?*

b) *Si $n = 6$, peut-il obtenir 6 sacs de 6 pièces ? Si oui, comment ?*

c) *Si $n = 7$, peut-il obtenir 7 sacs de 7 pièces ? Si oui, comment ?*

d) *Si $n = 2022$, peut-il obtenir 2022 sacs de 2022 pièces ? Si oui, comment ?*

Solution inspirée de celles de Gaëlle Rogiest, Giovanni Menna, Eliot Warnant et Martin Lejeune

a) Commençons par rendre impair le nombre de pièces de chaque sac. Ensuite, augmentons les cinq nombres tout en les gardant impairs : pour cela, si nous ajoutons 1 et 3 pièces à deux sacs, nous ajouterons ensuite 3 et 1 pièces aux mêmes deux sacs. Enfin, nous retirons 2 et 2 pièces deux fois de sacs bien choisis. Voici le détail :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\overset{+2}{3} & \overset{+3}{5} & 3 & \overset{+1}{5} & 5 \\
\overset{+3}{6} & \overset{+2}{7} & \overset{+1}{4} & 5 & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\overset{+1}{7} & 7 & \overset{+3}{7} & \overset{+2}{7} & 5 \\
\overset{-2}{5} & \overset{-2}{5} & 7 & 7 & 5 \\
5 & 5 & \overset{-2}{5} & \overset{-2}{5} & 5
\end{array}$$

b) Cela est impossible. L'opération d'ajout augmente le nombre total de pièces de $1+2+3 = 6$ et l'opération de retrait le diminue de $2+2 = 4$. Comme 6 et 4 sont des nombres pairs, la parité du nombre total de pièces est constante. Or au départ nous avons $1+2+3+4+5+6 = 21$ pièces, mais nous voudrions terminer avec $6 \cdot 6 = 36$ pièces. Comme ces deux nombres ont des parités différentes, c'est impossible.

c) C'est impossible. La première opération change la parité de deux des nombres de pièces dans les sacs, la deuxième opération aucune de ces parités. Mais au départ 4 des nombres sont impairs (1, 3, 5 et 7) tandis qu'à l'arrivée souhaitée les 7 nombres sont impairs. Comme 4 et 7 n'ont pas la même parité, c'est impossible.

d) C'est à nouveau impossible. Comme au b), vérifions que le nombre total de pièces au départ et celui à l'arrivée (souhaitée) sont de parités différentes. Au départ, parmi les nombres $1, 2, \ldots, 2\,022$ il y en a $1\,011$ qui sont impairs et $1\,011$ est impair, donc le nombre total de pièces est impair. À l'arrivée, tous les nombres sont pairs, donc leur somme aussi.

Questions de la finale Midi 2022

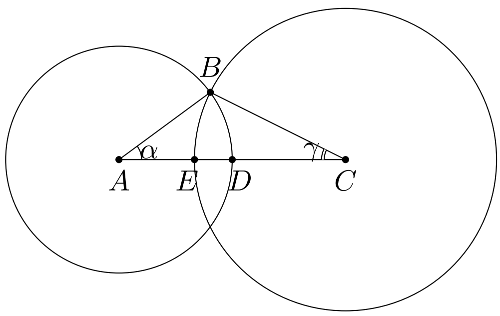
Question 1

Le triangle ABC est un triangle quelconque dont $[AC]$ est le plus grand côté. Les cercles de centre A passant par B et de centre C passant par B coupent $[AC]$ en D et E respectivement.

a) Si, dans le triangle ABC, les angles en A et en C mesurent respectivement $60°$ et $20°$, quelle est l'amplitude de $\widehat{EBD}$?

b) De manière générale, quelle est l'amplitude de $\widehat{EBD}$, en fonction de l'amplitude de $\widehat{ABC}$?

Solution inspirée de celle de Clémence De Veuster



Soit α l'amplitude de l'angle $\widehat{CAB}$ et γ l'amplitude de l'angle $\widehat{BCA}$, on a donc

$$|\widehat{ABC}| = 180° - \alpha - \gamma.$$

Comme B et D appartiennent au cercle de centre A, $|AB| = |AD|$ et donc

$$|\widehat{ABD}| = |\widehat{BDA}| = \frac{1}{2}\,(180° - \alpha)\,.$$

De même B et E appartiennent au cercle de centre C, $|BC| = |CE|$ et donc

$$|\widehat{EBC}| = |\widehat{CEB}| = \frac{1}{2}\,(180° - \gamma)\,.$$

Or, les points A, E, D et C sont alignés puisqu'ils appartiennent à $[AC]$, ainsi

$$|\widehat{CEB}| = |\widehat{DEB}| = \frac{1}{2}\,(180° - \gamma) \text{ et } |\widehat{BDA}| = |\widehat{BDE}| = \frac{1}{2}\,(180° - \alpha)\,.$$

Dans le triangle BDE,

$$|\widehat{EBD}| = 180^\circ - |\widehat{DEB}| - |\widehat{BDE}| = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma).$$

Or $|\widehat{ABC}| = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$, on a ainsi donc $|\widehat{EBD}| = \dfrac{180^\circ - |\widehat{ABC}|}{2}$.

On peut dès lors répondre à la question a) : dans le triangle ABC, on a

$$|\widehat{ABC}| = 180^\circ - |\widehat{BCA}| - |\widehat{CAB}| = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ.$$

Ainsi, on a immédiatement $|\widehat{EBD}| = \dfrac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$.

Question 2

Ci-dessous, la notation $\overline{abc}$ représente le nombre dont les chiffres sont, de gauche à droite, a, b et c ; donc $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Par définition, la factorielle $n!$ du nombre naturel n non nul vaut $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ et la factorielle de zéro est $0! = 1$. Quels nombres $\overline{abc}$ à trois chiffres satisfont l'égalité suivante ?

$$\overline{abc} \ = \ a! + b! + c!$$

Solution de Maxime Caine

Comme $7! = 5\,040$ est un nombre à 4 chiffres, le chiffre des centaines a doit être strictement inférieur à 7. Si un des chiffres a, b ou c était égal à 6, on aurait $a!+b!+c! \geqslant 6!+0!+0! = 722$ alors que $a < 7$. Donc, chacun des chiffres a, b et c est inférieur ou égal à 5.

Mais alors a doit être inférieur ou égal à 3 car $a! + b! + c! \leqslant 3 \cdot 5! = 360$.

— $a \neq 3$, sinon on aurait $\overline{3bc} = 3! + b! + c!$ et $\overline{3bc} \geqslant 300 > 6 + 5! + 5! = 246$.

— $a \neq 2$, sinon on aurait $b = c = 5$ (pour que $\overline{abc} \geqslant 100$) et $255 \neq 2! + 5! + 5!$.

Le chiffre des centaines est donc égal à 1 et un seul des chiffres b ou c est égal à 5 pour que $100 \leqslant \overline{abc} < 200$.

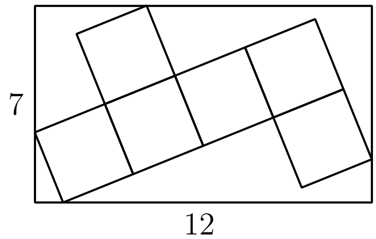
— Si $b = 5$, on doit avoir $\overline{15c} = 1! + 5! + c! = 121 + c!$, avec $c \leqslant 4$:
  - $151 \neq 1! + 5! + 1! = 122$,
  - $152 \neq 1! + 5! + 2! = 123$,
  - $153 \neq 1! + 5! + 3! = 127$,
  - $154 \neq 1! + 5! + 4! = 145$.

— Si $c = 5$, on doit avoir $\overline{1b5} = 1! + b! + 5! = 121 + b!$, avec $b \leqslant 4$:
  - $115 \neq 1! + 5! + 1! = 122$,
  - $125 \neq 1! + 5! + 2! = 123$,
  - $135 \neq 1! + 5! + 3! = 127$,
  - $145 = 1! + 5! + 4! = 145$.

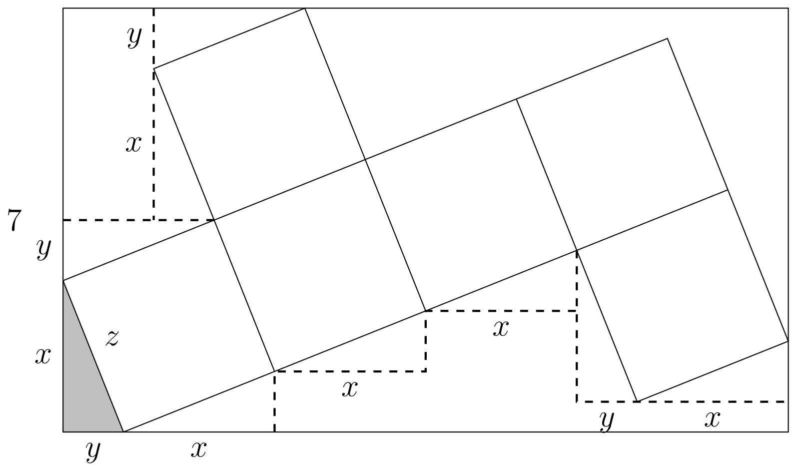
Le seul nombre naturel à trois chiffres qui satisfait à l'égalité $\overline{abc} = a! + b! + c!$ est 145.

Question 3

La figure ci-dessous est constituée de six carrés juxtaposés, de même côté, et d'un rectangle de côtés 12 et 7, circonscrit à l'assemblage des six carrés. Quelle est l'aire de l'un des six carrés ?



Solution inspirée de celles de Stefan ANDRIAN ALBESCU



Pour calculer la surface d'un carré, nous recherchons la longueur z d'un de ses côtés. Considérons le triangle rectangle (en gris sur la figure) déterminé par le carré dans le coin inférieur gauche du rectangle circonscrit. Son hypoténuse mesure z, et nous notons x et y les longueurs des côtés de l'angle droit, comme sur la figure.

Par rotation(s) de $\pm 90°$ et/ou translations successives, nous obtenons des copies isométriques de ce triangle comme indiqué en pointillés sur la figure. En considérant la longueur et la largeur du rectangle circonscrit, on obtient donc : $4x + 2y = 12$ et $2x + 2y = 7$.

En soustrayant ces équations membre à membre, on obtient : $2x = 5$, d'où $x = 2,5$. En injectant cette valeur dans la deuxième équation, on obtient : $2y = 7 - 2x = 7 - 5 = 2$, d'où $y = 1$.

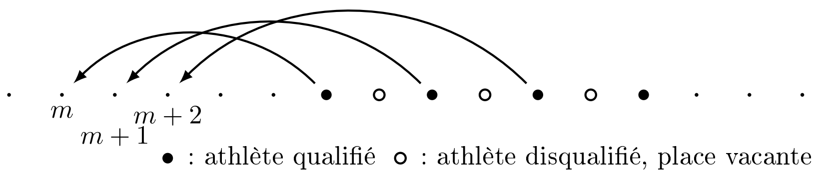
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle grisé, on a : $z^2 = x^2 + y^2 = 2{,}5^2 + 1^2 = 6{,}25 + 1 = 7{,}25$. Comme l'aire du carré vaut z^2, on a donc que cette aire vaut 7,25.

Question 4

Cent athlètes sont placés en file, de gauche à droite, selon leur numéro de dossard de 1 *à* 100. *Avant le départ de la course, un commissaire sportif annonce que certains athlètes sont disqualifiés pour cause de dopage. De ce fait, les n athlètes restants se déplacent d'un certain nombre de places vers la gauche, sans se dépasser, afin d'occuper toutes les places de gauche, de la* $1^{\text{ère}}$ *à la* $n^{\text{ème}}$ *place.*
Il apparait alors que tous ceux qui restent ont été décalés d'un nombre différent de places. Quel est le plus petit nombre d'athlètes disqualifiés autorisant une telle situation ?

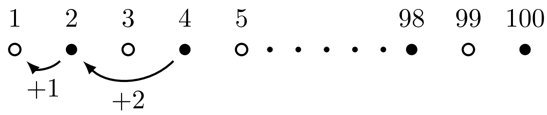
Solution de Clémence De Veuster

Deux athlètes voisins ne peuvent être tous les deux qualifiés car cela voudrait dire qu'ils se déplaceraient d'un même nombre de places. En effet, si un athlète se décale de m places vers la gauche son voisin de droite devra aussi se décaler de m places pour le rejoindre. La seule situation possible qui limite le nombre d'athlètes disqualifiés est celle où un athlète sur deux est disqualifié. Ainsi, chaque athlète est séparé d'une place vacante de son voisin de gauche et devra se déplacer d'une place de plus que ce voisin. Chaque athlète qualifié se déplacera donc d'un nombre différent de places que les autres.



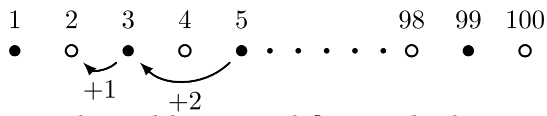
Comme le nombre d'athlètes est pair (100), il y a deux configurations possibles :

— L'athlète à l'extrême gauche est disqualifié et celui à l'extrême droite reste,



Dans cette configuration, chaque athlète se déplace d'un nombre de places correspondant à la sa nouvelle position dans la file.

— L'athlète à l'extrême gauche reste et celui à l'extrême droite est disqualifié.



Dans cette configuration, les athlètes qualifiés se déplacent d'une place de moins que celle correspondant à leur nouvelle position dans la file (le 1^{er} reste en place, le second se déplace d'une place, le troisième de deux places, etc.) .

On peut remarquer que c'est cette situation qui entraîne le moins de déplacements.

Dans chaque cas, le nombre de disqualifiés est égal à $\frac{100}{2} = 50$ et on ne peut pas en disqualifier moins.

Le nombre minimum d'athlètes qui peuvent être disqualifiés est donc égal à 50.

Questions de la finale Maxi 2022

Question 1

Par définition, la factorielle $a!$ du nombre naturel a non nul vaut $a! = a \times (a-1) \times \cdots \times 1$.

a) *Existe-t-il un nombre entier a, compris entre 2 et 100, tel que $a!$ est un carré parfait ? Si oui, lequel ?*

b) *Le nombre $P = 1! \times 2! \times 3! \times \cdots \times 100!$ est-il un carré parfait ?*

c) *Existe-t-il un nombre entier a, compris entre 1 et 100, tel que $\dfrac{P}{a!}$ est un carré parfait ?*

   i. *Si oui, quelles sont toutes les valeurs possibles de a ?*

   ii. *Sinon, existe-t-il deux nombres entiers a et b distincts, compris entre 1 et 100, tels que $\dfrac{P}{a! \times b!}$ est un carré parfait ?*

Solution de Benoît Van Schaftingen

a) Aucun nombre entier $a!$, avec a compris entre 2 et 100 ne peut être un carré parfait. En effet le plus grand nombre premier plus petit ou égal à a n'apparaîtra qu'une seule fois comme facteur dans l'écriture de $a!$.

b) On observe que :

$1! \times 2! = 1! \times 2$

$1! \times 2! \times 3! = 1! \times 2 \times 3!$

$1! \times 2! \times 3! \times 4! = 1! \times 2 \times (3!)^2 \times 4$

$1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! = 1! \times 2 \times (3!)^2 \times 4 \times 5!$

$1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times 6! = 1! \times 2 \times (3!)^2 \times 4 \times (5!)^2 \times 6$

$\vdots$

$P = (1! \times 3! \times \cdots \times 99!)^2 \times (2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100)$

Les nombres impairs interviennent chaque fois un nombre pair de fois ; il reste à examiner un produit composé des nombres pairs.

Or $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100 = 2^{50} \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 50) = (2^{25})^2 \times 50!$

Comme nous savons par a) que $50!$ n'est pas un carré parfait, P n'est pas un carré parfait.

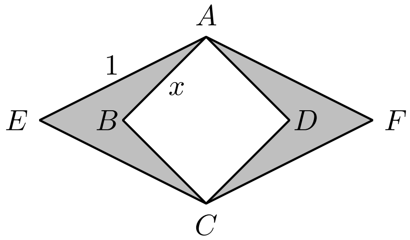
c) L'écriture précédente de P montre que $\frac{P}{50!}$ est un carré parfait et que 50 est la seule valeur possible pour que $\frac{P}{a!}$ soit un carré parfait. Il n'existe donc aucun nombre entier a et b tel que $\frac{P}{a! \times b!}$ soit un carré parfait.

Question 2

Extérieurement à un carré $ABCD$ de côté variable x, avec $0 < x < 1$, est construit le losange $AECF$ de côté 1, comme sur la figure ci-contre.

a) Quelle est l'aire de la partie de plan ombrée (intérieure au losange $AECF$ et extérieure au carré $ABCD$), en fonction de x ?

b) Pour quelle valeur de x l'aire de la partie de plan ombrée est-elle maximale ?



Solution d'Olivier D'ANGELO

a) L'aire ombrée $\mathscr{A}(x)$ est égale à $\frac{1}{2}|AC|\cdot|EF|-|AB|^2$. Puisque le côté du carré $ABCD$ est $|AB| = x$, la diagonale $|AC| = x\sqrt{2}$. Si I est le centre du carré, le triangle AIE est rectangle et le théorème de PYTHAGORE livre $\frac{1}{2}|EF| = |EI| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}$. Et donc on a

$$\mathscr{A}(x) = x\sqrt{2-x^2} - x^2, \text{ pour } 0 < x < 1.$$

b) Pour rechercher le maximum, effectuons le changement de variable : $x = \sqrt{2}\cos\theta$, avec $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\theta) &= \sqrt{2}\cos\theta\sqrt{2(1-\cos^2\theta)} - 2\cos^2\theta \\ &= 2\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\theta\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}'(\theta) &= -2\sqrt{2}\sin\theta\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\left(2\theta - \tfrac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

ce qui conduit au tableau de variation :

θ	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
$\mathscr{A}'(\theta)$	|	$+$	0	$-$	|
$\mathscr{A}(\theta)$	|	$\nearrow$		$\searrow$	|

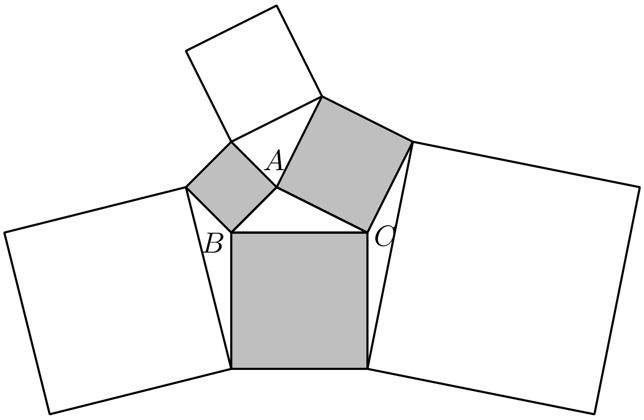
Le maximum de la fonction $\mathscr{A}(\theta)$ est atteint pour $\theta = \frac{3\pi}{8}$ ou encore $x = \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$, ce qui après calcul et simplification donne $x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Question 3

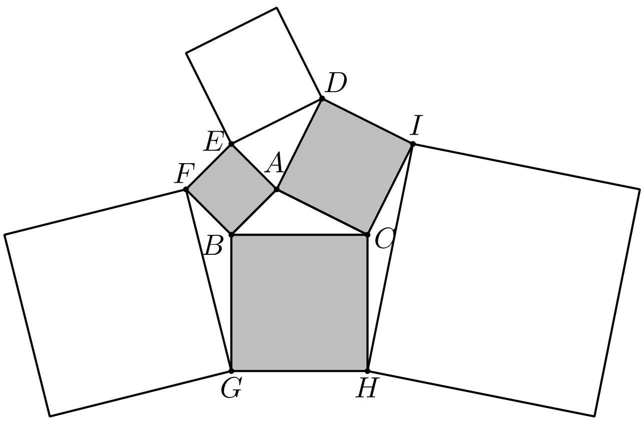
Dans la figure ci-dessous, trois carrés ombrés sont construits sur les côtés d'un triangle ABC, extérieurement au triangle. Trois carrés non *ombrés sont construits à partir de sommets des carrés ombrés, comme indiqué sur la figure.*

a) Si ABC est un triangle rectangle, que vaut le rapport de la somme des aires des carrés non *ombrés à la somme des aires des carrés ombrés ?*

b) Et si ABC est un triangle quelconque ?



Solution de Pierre Roth



Notons $a = |BC|$, $b = |AC|$ et $c = |AB|$. D'après le théorème d'Al Kashi dans les triangles AED, CHI et BGF, on a :

$$\begin{aligned}
|ED|^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi - \widehat{A}) \\
|HI|^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \widehat{C}) \\
|GF|^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\pi - \widehat{B})
\end{aligned}$$

Le rapport cherché vaut

$$\begin{aligned}\frac{|ED|^2+|HI|^2+|GF|^2}{a^2+b^2+c^2} &= \frac{2(a^2+b^2+c^2)+2ab\cos\widehat{C}+2bc\cos\widehat{A}+2ac\cos\widehat{B}}{a^2+b^2+c^2}\\ &= 2+\frac{2ab\cos\widehat{C}+2bc\cos\widehat{A}+2ac\cos\widehat{B}}{a^2+b^2+c^2}. \qquad (1)\end{aligned}$$

En appliquant encore Al Kashi au triangle ABC, on obtient

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C} \iff 2ab\cos\widehat{C}=a^2+b^2-c^2$$

et de même

$$2ac\cos\widehat{B}=a^2+c^2-b^2 \quad \text{et} \quad 2bc\cos\widehat{A}=b^2+c^2-a^2.$$

L'expression (1) devient alors

$$2+\frac{a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2+c^2}=2+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=3.$$

Ce rapport est valable dans tout triangle ABC, donc également dans un triangle rectangle.

Question 4

Les 590 élèves d'une école seront répartis en 25 classes comptant chacune de 18 à 28 élèves.

a) *Existe-t-il une répartition des élèves pour laquelle 22 classes ont le même nombre d'élèves ?*

b) *Quel est le plus grand nombre naturel n pour lequel au moins une répartition des élèves fait que n classes ont le même nombre d'élèves ?*

c) *Existe-t-il une répartition des élèves pour laquelle il* n'y a pas *trois classes avec le même nombre d'élèves ?*

d) *Quel est le plus grand nombre naturel n pour lequel toute répartition des élèves fait qu'au moins n classes ont le même nombre d'élèves ?*

Solution inspirée de celle de Rodolphe Caine

a) Oui. En effet, on a que $590 = 22 \cdot 23 + 3 \cdot 28$. Une répartition avec 22 classes ayant le même nombre d'élèves pourrait donc être 22 classes avec 23 élèves et 3 classes avec 28 élèves.

b) D'après la réponse à la question a), il nous reste seulement à étudier les cas $n = 23$, 24 et 25.

— Si $n = 25$, on remarque simplement que 25 ne divise pas 590 ($590 = 25 \cdot 23 + 15$) donc $n = 25$ n'est pas solution car on ne peut remplir 25 classes avec autant d'élèves chacune.

— Si $n = 24$, on pose q le nombre d'élèves dans chacune des 24 classes. Comme la 25e classe a entre 18 et 28 élèves, on a :

$$24q + 18 \leqslant 590 \leqslant 24q + 28 \quad \Longleftrightarrow \quad 562 \leqslant 24q \leqslant 572.$$

Or $24 \cdot 23 = 552$ et $24 \cdot 24 = 576$, donc il n'y a pas de multiple de 24 entre 562 et 572, ce qui conclut que $n = 24$ n'est pas une solution.

— Le cas $n = 23$ fonctionne car $590 = 23 \cdot 24 + 2 \cdot 19$. Donc une répartition avec 23 classes comptant 24 élèves chacune et 2 classes avec 19 élèves chacune est possible.

Donc $n = 23$ est le plus grand entier naturel tel qu'une répartition existe avec n classes ayant autant d'élèves.

c) La réponse est non. Les classes peuvent avoir entre 18 et 28 élèves, ce qui donne 11 valeurs possibles pour le nombre d'élèves d'une classe. Il y a 25 classes et $25 > 2 \cdot 11$, donc d'après le principe des tiroirs, il y a au moins 3 classes ayant le même nombre d'élèves et ce peu importe la répartition des 590 élèves.

d) À la question c), nous avons montré que $n = 3$ fonctionne. Il reste à montrer que c'est la plus grande solution possible. Trouvons donc une répartition avec au plus 3 classes ayant autant d'élèves chacune. En voici une :

$$2 \cdot 18 + 20 + 3 \cdot 21 + 3 \cdot 22 + 3 \cdot 23 + 3 \cdot 24 + 3 \cdot 25 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 27 + 2 \cdot 28 = 590$$

La réponse est donc que le plus grand entier n tel que peu importe la répartition on ait au moins n classes avec autant d'élèves est $n = 3$.

Liste des donateurs

Au nom des lauréats, la Commission Olympiade tient à remercier chaleureusement les Ministres, les institutions, les associations ainsi que les sociétés commerciales qu'elle a l'honneur de compter parmi les donateurs de cette 47e édition de l'OMB. L'intérêt et le soutien, sans cesse renouvelés, que ces « sponsors » portent à l'organisation de l'OMB est un gage du sérieux de celle-ci. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre plaisir de récompenser en leurs noms nos finalistes.

La Fédération Wallonie-Bruxelles

Mme Caroline Désir, Ministre de l'Éducation en FWB

M. Hervé Jamar, Gouverneur de la Province de Liège
M. Tommy Leclercq, Gouverneur de la Province de Hainaut
M. Denis Mathen, Gouverneur de la Province de Namur
M. Tanguy Stuckens, Président du Collège Provincial du Brabant Wallon
M. Jean-Marc Van Espen, Député-Président du Collège Provincial de Namur
Mme Isabelle Evrard, Députée provinciale en charge de l'Enseignement en Province du Brabant Wallon
M. Vincent Fournaux, Député provincial en charge de l'Enseignement en Province de Namur

Mme Annemie Schaus, Rectrice de l'ULB
M. Pierre Wolper, Recteur de l'ULiège
M. Vincent Blondel, Recteur de l'UCLouvain
M. Philippe Dubois, Recteur de l'UMons
M. Annick Castiaux, Rectrice de l'UNamur

M. Olivier Markowitch, Doyen de la faculté des sciences de l'ULB
M. Pascal Poncin, Doyen de la faculté des sciences de l'ULiège
M. Jean Van Schaftingen, Président de l'École Mathématique de l'UCLouvain
M. Christian Michaux, Doyen de la faculté des sciences de l'UMons
M. Timoteo Carletti, Directeur du Département de Mathématiques de l'UNamur

M. Yvik Swan, Président de la Société Mathématique de Belgique

M. Jean-Christophe DELEDICQ, des Éditions du Kangourou à Paris
M. Pascal HOUDARD, des Éditions Pôle et Tangente à Combon
M. Xavier THIRIONET, Admin Business Partner chez Google à St-Ghislain

La Ville de Bouillon pour ses City-Pass
Le Safari Parc Monde Sauvage d'Aywaille
Le Domaine des grottes de Han-sur-Lesse
L'Archéosite et Musée d'Aubechies de Belœil
Le musée du Malgré-tout à Treignes
Le domaine du château de Belœil
Le domaine du château de Seneffe
L'Archéoparc de la Malagne à Rochefort

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française
L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP)

Et tout particulièrement,

M. Molho XHANDROS, *Space Marketing Manager* à l'Euro Space Center à Transinne qui offre à tous les finalistes de notre OMB une réduction substantielle sur les stages organisés (en internat ou en externat), mais aussi une « Mission Discovery » aux gagnants des trois catégories

Mme Agathe DUCA-COMBALUZIER, Responsable marketing France et Belgique de la firme CASIO qui offre une calculatrice à tous les participants.

Rendez-vous en 2023 pour la 48e olympiade ?

Sous réserve de modification, voici les dates de la 48e édition de l'Olympiade en 2023 :

Éliminatoire : mercredi 18 janvier 2023

Demi-finale : mercredi 8 mars 2023

Finale : mercredi 19 avril 2023

Proclamation : samedi 27 mai 2023

Nous vous donnons d'ores et déjà rendez-vous !

CHÂTEAU DE BELŒIL
LE VERSAILLES BELGE

EURO SPACE CENTER

ÉDITIONS
POLE

Wallonie

Archéosite et Musée d'Aubechies-Beloeil

MONDE SAUVAGE

DOMAINE DES
GROTTES
DE HAN

PRÉHISTOIRE ET ANTIQUITÉ
TREIGNES
MUSÉE DU MALGRÉ-TOUT

Province de liège

BOUILLON
Perle de la Semois

les découvertes de Comblain

DOMAINE DU CHÂTEAU DE SENEFFE

Le Brabant wallon

Google Centres de données

PROVINCE de NAMUR

Malagne

ARCHEOPARC DE ROCHEFORT

Province de HAINAUT

ASBL
SBPM
e.f.

Avec le soutien de la
Fédération Wallonie - Bruxelles

FÉDÉRATION
WALLONIE-BRUXELLES

CASIO®

félicite et encourage

tous les participants de cette

47^{e} Olympiade Mathématique Belge.

Éditeur responsable : Michel Sebille / 156 rue Osseghem / 1080 Molenbeek-Saint-Jean