17th Benelux Mathematical Olympiad

25–27 April 2025 — Liège, Belgium

sponsored by RESEARCH

Problems

Language: ***French***

Les problèmes ***ne*** *sont* ***pas*** *ordonnés par difficulté estimée.*

Problème 1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = f(x)^2 - y$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$?

Problème 2. Soit $N \geqslant 2$ un nombre naturel. Lors d'un stage d'entrainement aux olympiades mathématiques, les mêmes N cours sont organisés chaque jour. Chaque étudiant suit, chaque jour, exactement un des N cours. À la fin du stage, chaque étudiant a suivi chaque cours exactement une fois et chaque paire d'étudiants a suivi au moins une fois le même cours la même journée, mais a suivi des cours différents pendant au moins un autre jour. Quel est, en fonction de N, le plus grand nombre possible d'étudiants participant au stage ?

Problème 3. Dans un triangle ABC, soit I le centre du cercle inscrit et soit Ω le cercle circonscrit. On note D, E et F les milieux des arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ et $\overset{\frown}{AB}$ de Ω ne contenant pas A, B et C, respectivement. Soit D' le point de Ω diamétralement opposé à D. Montrer que I, D' et le milieu M de $[EF]$ appartiennent à une même droite.

Problème 4. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$ des entiers tels que, pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, 2047\}$, il existe un sous-ensemble $S \subseteq \{0, 1, \ldots, 10\}$ satisfaisant

$$\sum_{j \in S} a_j \equiv i \pmod{2048}.$$

Montrer que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, 10\}$, il y a un unique $j \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ tel que a_j est divisible par 2^i mais pas par 2^{i+1}.

Note : $\sum_{j \in S} a_j$ est la notation de sommation, par exemple, $\sum_{j \in \{2,5\}} a_j = a_2 + a_5$, alors que, pour l'ensemble vide $\varnothing$, on définit $\sum_{j \in \varnothing} a_j = 0$.

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points