Mathématique et Automatique : C'est Magique !

Joseph Winkin

FUNDP Namur, Département de Mathématique

Proclamation de la 34e Olympiade Mathématique Belge, Mai 2009

"Nous vivons aujourd'hui une situation pour le moins paradoxale." [1]

[1] ≪ L'explosion des mathématiques ≫, SMF et SMAI, juillet 2002

"Les mathématiques sont un instrument irremplaçable de formation à la **rigueur** et au **raisonnement**;

elles développent l'**intuition**, l'**imagination**, l'esprit critique;

elles sont aussi un **langage international**, et un élément fort de la culture." [1]

[1] ≪ L'explosion des mathématiques ≫, SMF et SMAI, juillet 2002

"Mais elles jouent en outre, par leurs interactions avec les autres sciences, un rôle grandissant dans la **conception** et l'**élaboration** des objets de notre **vie quotidienne**." [1]

[1] ≪ L'explosion des mathématiques ≫, SMF et SMAI, juillet 2002

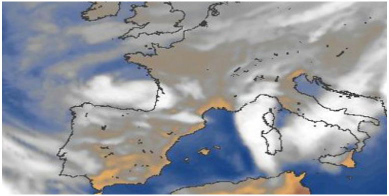
"Or cet état de fait est en général **totalement ignoré** par la majorité de nos concitoyens,

pour qui les mathématiques ont souvent perdu leur sens ..." (1)

(1) ≪ L'explosion des mathématiques ≫, SMF et SMAI, juillet 2002

Quelques exemples :

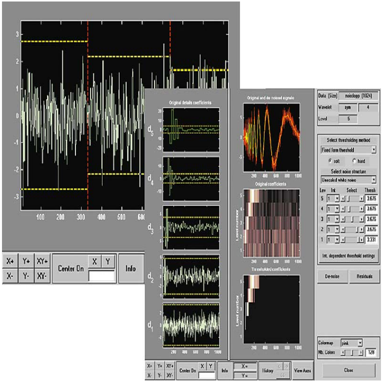
- **Le temps qu'il fera**
  La **prévision météorologique ou climatique** ... implique la modélisation de nombreux phénomènes de natures différentes, et l'intervention de plusieurs sciences, des mathématiques à la biologie, en passant par l'informatique, la physique ou la chimie.



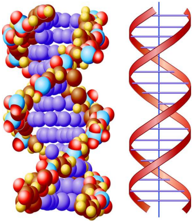
Mathématiques Appliquées

- **Cryptage et décryptage : communiquer en toute sécurité**
  Dans le monde actuel, où les **télécommunications** occupent une place cruciale, la cryptographie est … devenue une science complexe, qui ne peut se passer de mathématiciens de haut niveau.

- **Des ondelettes pour comprimer une image**
  Qu'elles soient stockées numériquement dans des mémoires informatiques ou qu'elles voyagent à travers Internet, **les images** occupent beaucoup de place. Heureusement, il est possible de les « condenser » sans altérer leur qualité !

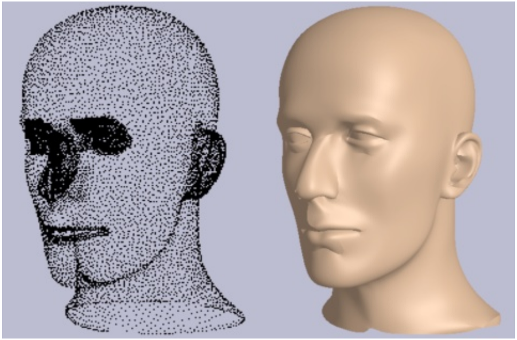


- **De l'ADN à la théorie des noeuds**
  L'**activité biologique de la molécule d'ADN** dépend notamment de son agencement dans l'espace et de la façon dont elle est entortillée choses qui sont du ressort de la théorie mathématique des noeuds.



- **Les casse-tête des compagnies aériennes**
  Les problèmes d'**organisation et de planification** posés à une compagnie aérienne sont analogues à ceux rencontrés dans d'autres secteurs d'activité. La recherche opérationnelle, domaine qui concerne des dizaines de milliers de mathématiciens et d'ingénieurs dans le monde, s'évertue à les résoudre au mieux.

- **Reconstruire des surfaces pour l'imagerie**
  Reconstituer une surface en ne connaissant que certains de ses points: un problème que l'on rencontre souvent, quil s'agisse d'**exploration géologique, d'archivage de vestiges archéologiques, d'imagerie médicale ou industrielle**.



- **Contrôler un monde complexe**
  Qu'il s'agisse de la manoeuvrabilité d'un avion, de la tenue mécanique d'une structure compliquée ou de la gestion du trafic automobile, le progrès dans ces domaines ne vient pas uniquement des inventions purement techniques. Il naît aussi de recherches abstraites, comme la **théorie mathématique du contrôle**.

Modélisation

Modèle mathématique :=

traduction de la réalité pour pouvoir lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques,

puis généralement, en sens inverse, la **traduction des résultats mathématiques** obtenus en prédictions ou opérations dans le monde réel.

Modélisation

Remarques importantes

Il n'existe jamais de modèle unique : **un modèle est toujours lié à ce que l'on veut en faire**.

Même lorsque le but est fixé, **il y a toujours plusieurs modèles possibles**, qui peuvent tous être aussi valables les uns que les autres.

Dans toute modélisation il y a un **choix a priori de l'espace mathématique** servant à repérer l'ensemble des phénomènes.

Modélisation

Un **système** est un objet, ou un ensemble d'objets, en évolution.

Exemples: un satellite artificiel, un circuit électrique, un avion, ...

Un **modèle** est une idéalisation d'un système.

Un système est remplacé par un **modèle**, souvent drastiquement plus simple, à des fins d'analyse et de conception.

Un modèle peut négliger de nombreuses caractéristiques du système physique, mais cependant conserve celles qui sont jugées cruciales pour le problème spécifique considéré.

Quelques exemples:

Système $\longrightarrow$ **Modélisation** $\longrightarrow$ **Description au moyen de :**

Satellite artificiel $\longrightarrow$ Équations de Lagrange
(pour la fonction Lagrangienne
$L =$ énergie cinétique $-$ énergie potentielle)

Réservoir mélangeur $\longrightarrow$ Lois de conservation
(équations d'équilibre de masse)

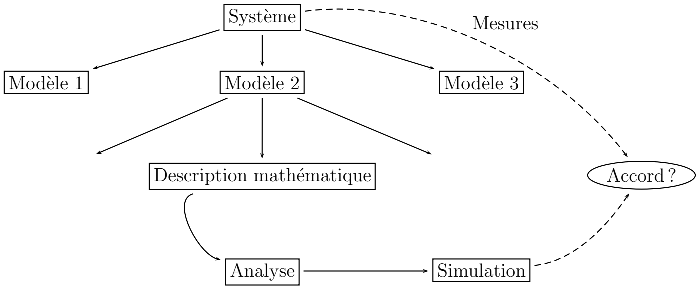
Réacteur biochimique $\longrightarrow$ Modèles dynamique de bilan
$+$ cinétique microbienne de croissance
(p.ex. loi de Monod, loi de Haldane)

Système $\longrightarrow$ **Modélisation** $\longrightarrow$ **Description au moyen de :**

Population $\longrightarrow$ Modèle logistique de croissance
(p.ex. population de poissons en pisciculture
espèces en compétition (p.ex. sur une île))
Modèle proie-prédateur

Circuit électrique $\longrightarrow$ Lois de Kirchoff
$+$ loi régissant les composants
(p.ex. loi d'Ohm)

Le **choix du modèle** est dicté par le problème considéré et le modèle est choisi à la fois par des considérations théoriques, des expérimentations et des simulations, et par des contraintes de coût et de précision.



L'automatique

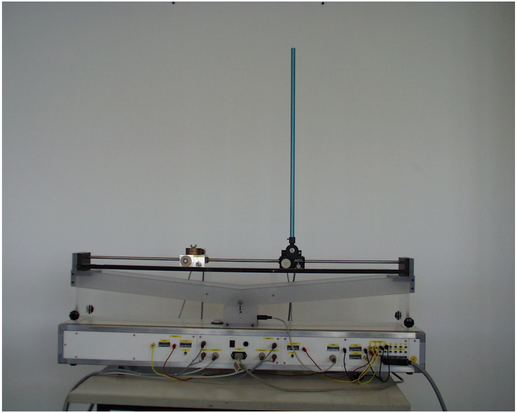
L'automatique $\subset$ sciences de l'ingénieur.

$\longrightarrow$ **modélisation, analyse, commande et régulation** des **systèmes dynamiques**.

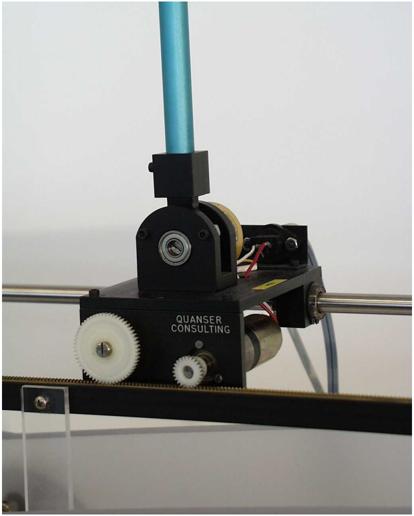
Fondements théoriques :
mathématiques, théorie du signal, informatique théorique

Elle permet l'**automatisation de tâches**
par des machines fonctionnant sans intervention humaine.

L'automatique



L'automatique



L'automatique

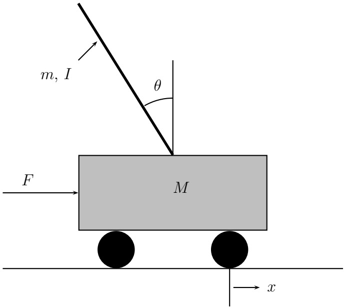
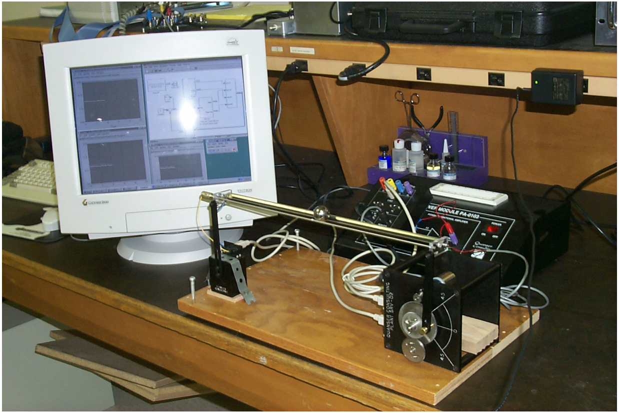


Figure 1: Pendule inversé.

L'automatique



L'automatique

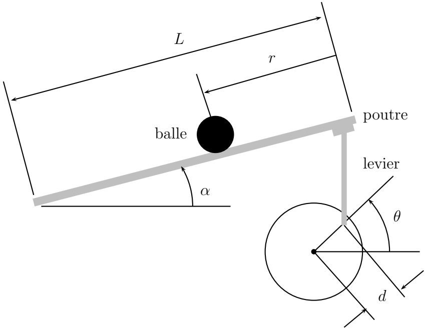


Figure 1: Balle et poutre.

L'automatique

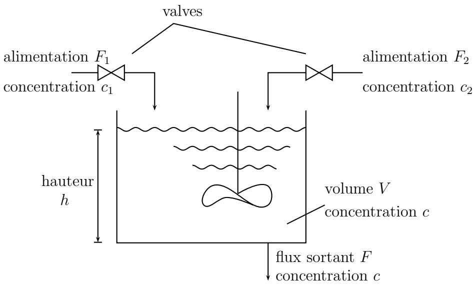
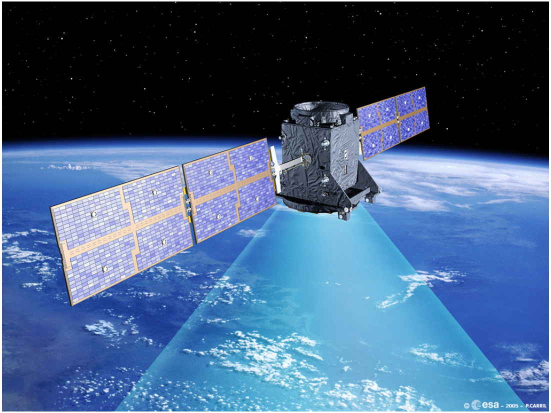


Figure 1: Réservoir mélangeur.

L'automatique



L'automatique

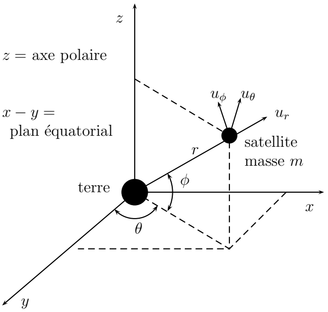


Figure 1: Satellite artificiel.

Etude de cas : Bras articulé

Pendule auquel on peut appliquer un couple comme force externe.

$\longrightarrow$ un des problèmes les plus simples en **robotique:**

le contrôle de la position d'un bras en rotation (avec un seul point d'attache) en utilisant un moteur placé au pivot.

Etude de cas : Bras articulé

Modélisation

Hypothèses simplificatrices: la friction est négligeable, toute la masse est concentrée à l'extrémité du bras, le bras est de longueur unitaire.

$u(t)$ = valeur du couple (force) externe au temps t

m = masse

g = accélération gravitationnelle

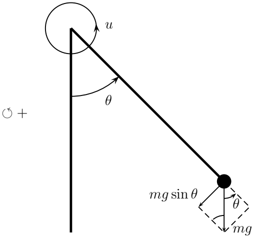


Figure 1: Pendule.

Modélisation

En utilisant la **loi de Newton** pour les objets en rotation, on obtient l'équation différentielle non linéaire du second ordre

$$m\,\ddot{\theta}(t) = u(t) - m\,g \sin\theta(t)$$

où $u(\cdot)$ = la fonction d'entrée (ou de contrôle).

Hypothèse: les unités sont choisies de telle sorte que $m = 1 = g$.

Modélisation

Avec $x_1 := \theta$ et $x_2 := \dot{\theta}$,

$$\ddot{\theta}(t) + \sin\theta(t) = u(t)$$

$\iff$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}_2(t) = u(t) - \sin x_1(t)$$

Instabilité: la position stationnaire verticale $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$ est un équilibre du système lorsqu'aucun contrôle n'est appliqué ($u = 0$).

Mais une petite déviation de cette position résultera en un **mouvement instable**.

Modélisation

Pour $\theta - \pi$ petit, $\sin\theta = -(\theta - \pi) + E(\theta - \pi)$ où

$$\lim_{\theta \to \pi} \frac{E(\theta - \pi)}{\theta - \pi} = 0$$

Simplification du modèle: Linéarisation :
Étant donné qu'on s'intéresse uniquement à de petites déviations, nous omettons la partie **non linéaire** $E(\theta - \pi)$.

Modélisation

Avec la nouvelle variable $\phi := \theta - \pi$ on obtient l'équation différentielle **linéaire**

$$\ddot{\phi}(t) - \phi(t) = u(t)$$

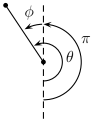


Figure 1: Angles

Analyse

Équation (différentielle linéaire) **homogène** :

$$\ddot{\phi}(t) - \phi(t) = 0$$

Équation (algébrique) **caractéristique** :

$$x^2 - 1 = 0$$

$\iff$

$$x^2 = 1$$

Solutions :

$$x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Analyse

Solution générale de l'équation (différentielle linéaire) **homogène** $\ddot{\phi}(t) - \phi(t) = 0$ ($\Longleftrightarrow \ddot{\phi}(t) = \phi(t)$) :

$$\phi(t) = A\ e^{-t} + B\ e^{t} = A\ \left(\frac{1}{r}\right)^{t} + B\ r^{t}$$

où $r = e = 2.71...$

Analyse

Solution particulière de l'équation (différentielle linéaire) **homogène** $\ddot{\phi}(t) - \phi(t) = 0$ ($\Longleftrightarrow \ddot{\phi}(t) = \phi(t)$)
avec la **condition initiale** $\phi(0) = 0.01$ et $\dot{\phi}(0) = 0$:

$$\phi(t) = A\ e^{-t} + B\ e^{t} \quad \text{et} \quad \dot{\phi}(t) = -A\ e^{-t} + B\ e^{t}$$

$\Longrightarrow$ pour $t = 0$:

$$A + B = 0.01 \quad \text{et} \quad -A + B = 0$$

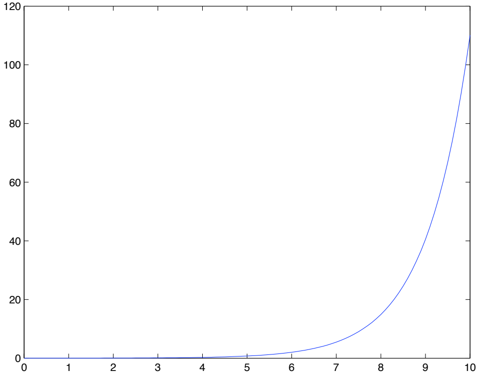
$\Longleftrightarrow$

$$B = A = 0.005$$

Etude de cas : Bras articulé

Analyse

$$\phi(t) = 0.005\ e^{-t} + 0.005\ e^{t}$$



Contrôle

Objectif : appliquer un contrôle $u(\cdot)$, selon les besoins, pour maintenir le bras en position stationnaire verticale en corrigeant la position, lorsqu'il y a des déviations.

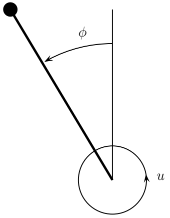


Figure 1: Pendule inversé.

Intermezzo

On appelle **fonction du deuxième degré** toute fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \quad x \rightsquigarrow y = ax^2 + bx + c$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$ax^2 + bx + c$ est appelé **trinôme du deuxième degré** en x .
Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont aussi appelées les racines (ou les zéros) du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Intermezzo

Le graphique d'une fonction du second degré est une **parabole**. Elle est caractérisée par divers éléments.

Le sommet

$$\begin{cases} y & = & ax^2 + bx + c \\ y' & = & 2ax + b = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{b}{2a}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Les coordonnées du sommet sont donc

$$S : \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

L'axe de symétrie $\qquad x = -\frac{b}{2a}$

Intermezzo

Concavité – convexité

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
y' &= 2ax + b \\
y'' &= 2a
\end{aligned}
$$

$y'' > 0 \Leftrightarrow a > 0$
$\Leftrightarrow$ le graphe tourne sa concavité vers le sens positif de l'axe des ordonnées
$\Leftrightarrow$ f est convexe.

$y'' < 0 \Leftrightarrow a < 0$
$\Leftrightarrow$ le graphe tourne sa concavité vers le sens négatif de l'axe des ordonnées
$\Leftrightarrow$ f est concave.

Intermezzo

Points d'intersection avec les axes

- Point d'intersection avec l'axe $0Y$: $I(0, c)$.
- Points d'intersection avec l'axe $0X$: on doit trouver les racines du trinôme

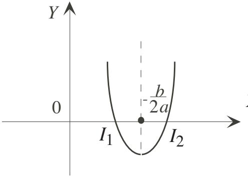
$$ax^2 + bx + c = 0 .$$

Intermezzo Posons $\rho = b^2 - 4ac$.

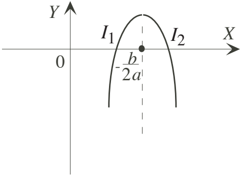
- si $\rho > 0$, le trinôme du second degré admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\rho}}{2a} , \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\rho}}{2a} .$$

$a > 0$



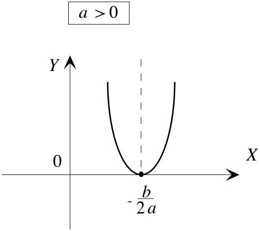
$a < 0$

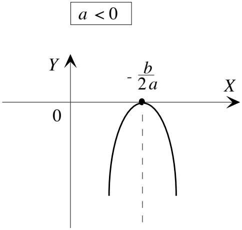


Intermezzo

- si $\rho = 0$, le trinôme admet une racine double :

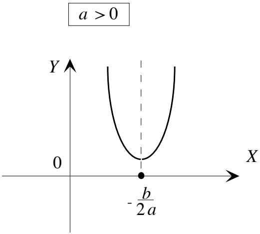
$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} .$$





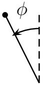
Intermezzo

- si $\rho < 0$, le trinôme n'admet pas de racines réelles.



Contrôle

Première approche . . . "naïve"

si $\phi = \theta - \pi > 0$ 

: appliquer un contrôle négatif $\circlearrowright\ -$

si $\phi = \theta - \pi < 0$ 

: appliquer un contrôle positif $\circlearrowleft\ +$

Contrôle

Appliquer une **rétro-action** (= un **feedback**) **proportionnel** $u(t) = -\alpha\phi(t)$ où la constante $\alpha > 0$ est appelée le **gain**

En substituant la valeur du contrôle dans l'équation en **boucle ouverte**

$$\ddot{\phi}(t) - \phi(t) = u(t)$$

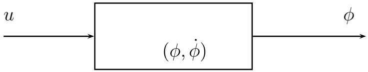
on obtient l'équation en **boucle fermée**:

$$\ddot{\phi}(t) - \phi(t) + \alpha\phi(t) = 0$$

Etude de cas : Bras articulé

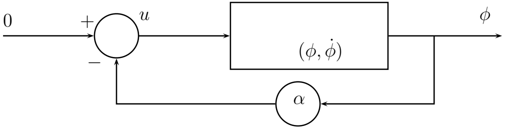
Contrôle

Boucle ouverte



Contrôle

Boucle fermée



Contrôle

Équation en **boucle fermée**:

$$\ddot{\phi}(t) - \phi(t) + \alpha\phi(t) = 0$$

Équation **caractéristique**:

$$x^2 - 1 + \alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 1 - \alpha$$

$\Longleftrightarrow$ (pour $\alpha < 1$)

$$x = -\sqrt{1-\alpha} < 0 \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{1-\alpha} > 0$$

Pour $\alpha > 1$: **Oscillations** ...
Cela ne fonctionne pas . . . **Problème !?**

Contrôle

Solution : Appliquer un **feedback proportionnel - dérivée**

$$u(t) = -\alpha\phi(t) - \beta\dot{\phi}(t)$$

En substituant la valeur du contrôle dans l'équation en **boucle ouverte**

$$\ddot{\phi}(t) - \phi(t) = u(t)$$

on obtient l'équation en **boucle fermée**:

$$\ddot{\phi}(t) + \beta\dot{\phi}(t) + (\alpha - 1)\phi(t) = 0$$

Contrôle

Avec $\alpha > 1$, $\beta > 0$ et

$$\beta^2 > 4(\alpha - 1)$$

les racines de l'équation **caractéristique**

$$x^2 + \beta x + (\alpha - 1) = 0$$

sont

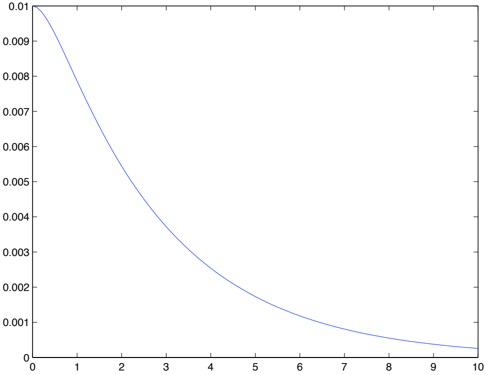
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2} < 0$$

Le **système est stabilisé** par feedback.

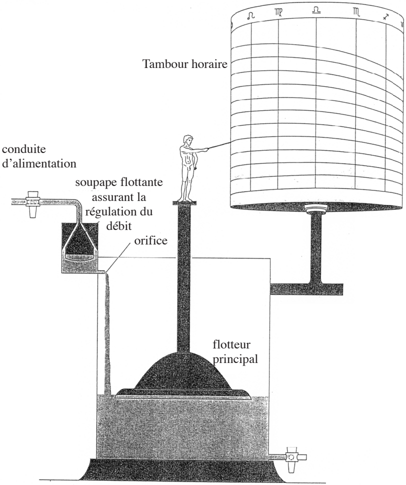
Contrôle $\alpha = 2$ et $\beta = 3$ $\phi(0) = 0.01$ et $\dot{\phi}(0) = 0$

$x_1 = -2.6180$ et $x_2 = -0.3820$

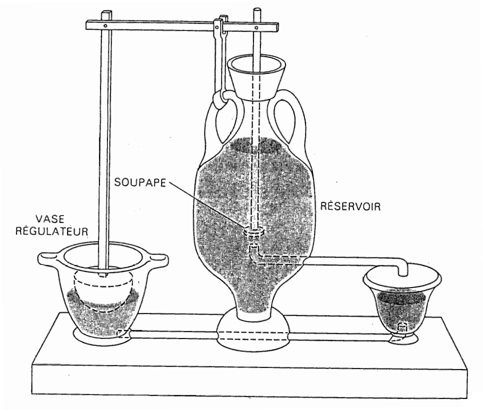
$$\phi(t) = -0.0017\ e^{x_1 t} + 0.0117\ e^{x_2 t}$$



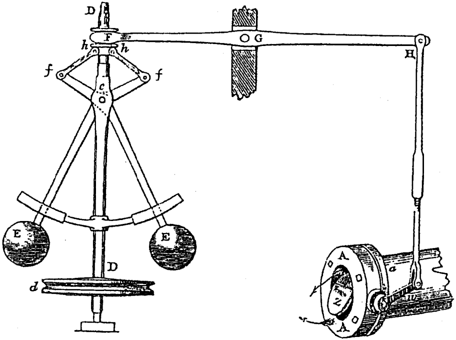
Clepsydre


Tambour horaire
conduite
d'alimentation
soupape flottante
assurant la
régulation du
débit
orifice
flotteur
principal

Fontaine à vin



Régulateur à boules (Watt)



Feedback

Éolienne

En guise de conclusion . . . et de clin d'oeil