

Géométrie axiomatique, d'Euclide à Hilbert

QUENTIN BROUETTE

Université de Mons

11 mai 2019

Etymologie et origine

Notre tradition géométrique remonte à l'antiquité

- ▶ Thales de Milet (environ de 625 à 546 avant JC),
- ▶ Pythagore de Samos (environ de 580 à 495 avant JC),
- ▶ Euclide (environ 300 avant JC),
- ▶ Diophante (?) & Ptolémée (environ 90 à 168 ap. JC) à Alexandrie.

Géométrie : grec ancien, geo- "terre", -métron "mesure".

Etude des droites, plans, cercles, courbes,...

Mathématique(s) : grec ancien, máthema "science, connaissance"

Etude des nombres, fonctions, géométrie,...

Science de l'**argumentation logique**.

Démarche axiomatique

Au cours de mathématique, on utilise des **théorèmes** et des **formules** pour résoudre des problèmes et effectuer des calculs.
Comment les théorèmes et formules sont-ils établis ?

Démarche axiomatique

Au cours de mathématique, on utilise des **théorèmes** et des **formules** pour résoudre des problèmes et effectuer des calculs.
Comment les théorèmes et formules sont-ils établis ?
En faisant des **démonstrations**,

Démarche axiomatique

Au cours de mathématique, on utilise des **théorèmes** et des **formules** pour résoudre des problèmes et effectuer des calculs. Comment les théorèmes et formules sont-ils établis ?

En faisant des **démonstrations**, basées sur :

- ▶ Arguments logiques : vérifiés étape par étape et (presque) irréfutables.
- ▶ Des acquis : théorèmes ou formules démontrés précédemment.
- ▶ Des **suppositions** : définitions, axiomes.

But du mathématicien : démontrer des choses **sophistiquées** avec des suppositions aussi **simples et naturelles** que possible.

Les éléments d'Euclide

Oeuvre de grande ampleur (environ 300 avant JC) :

- ▶ 13 livres.
- ▶ Référence pendant des siècles.
- ▶ **Démarche axiomatique**, ensuite utilisée dans la majorité des travaux mathématiques.



Les éléments d'Euclide

Définitions (en tout il y en a 35) :

- ▶ 1. Le point est ce dont la partie est nulle.
- ▶ 2. Une ligne est une longueur sans largeur.
- ▶ 3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
- ▶ 4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
- ▶ 10. Définition d'un angle droit.
- ▶ 15. Définition d'un cercle.

Les éléments d'Euclide

6 Axiomes

- ▶ Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
- ▶ Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
- ▶ Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
- ▶ Tous les angles droits sont égaux.
- ▶ Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.
- ▶ Deux droites ne renferment point un espace.

L'approche d'Euclide : limites

Les axiomes d'Euclide sont peu précis.

⇒ difficulté de fabriquer des démonstrations solides

D'ailleurs certaines démonstrations sont incomplètes.

Axiome (Cinquième axiome d'Euclide)

Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

L'approche d'Euclide : limites

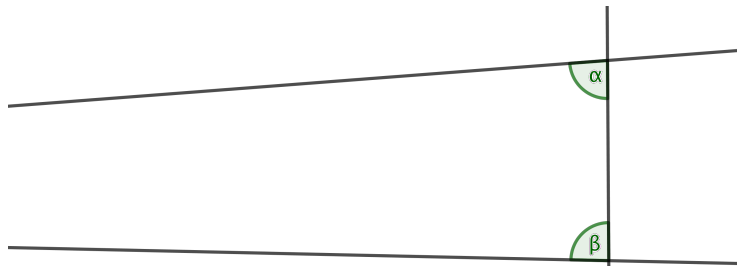
Les axiomes d'Euclide sont peu précis.

⇒ difficulté de fabriquer des démonstrations solides

D'ailleurs certaines démonstrations sont incomplètes.

Axiome (Cinquième axiome d'Euclide)

Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.



$$\alpha + \beta < 180^\circ$$

L'approche d'Euclide : limites

Les axiomes d'Euclide sont peu précis.

⇒ difficulté de fabriquer des démonstrations solides

D'ailleurs certaines démonstrations sont incomplètes.

Axiome (Cinquième axiome d'Euclide)

Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

Cet axiome n'est pas naturel (pas intuitif).

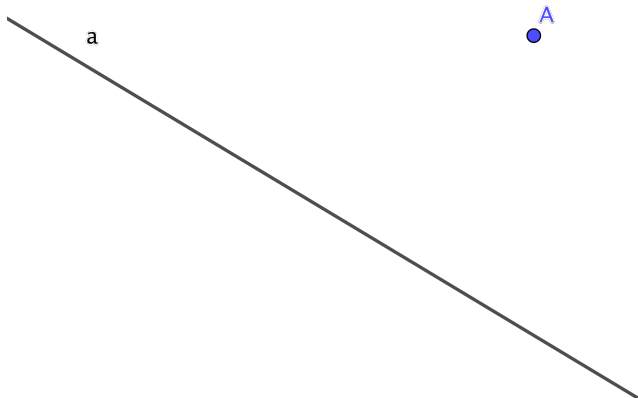
Tentatives de démonstration : Proclus (410-483), Clavius (1538-1612), Simson (1687-1768), Clairaut (1713-1765),...

Axiome (Cinquième axiome d'Euclide, formulé par Proclus)

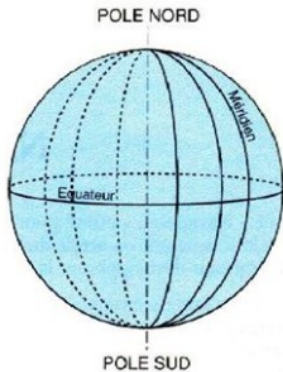
*Etant donné une droite a et un point A (qui n'est pas sur a), il existe **une seule** droite qui passe par A et qui ne coupe pas a .*

Axiome (Cinquième axiome d'Euclide, formulé par Proclus)

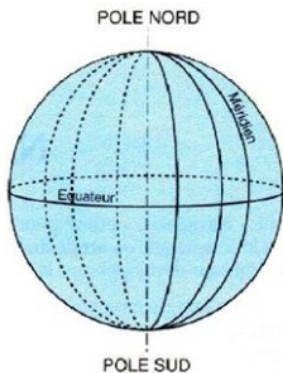
*Etant donné une droite a et un point A (qui n'est pas sur a), il existe **une seule** droite qui passe par A et qui ne coupe pas a .*



La géométrie de la sphère



La géométrie de la sphère



Les droites parallèles n'existent pas.

Alternatives au cinquième axiome d'Euclide

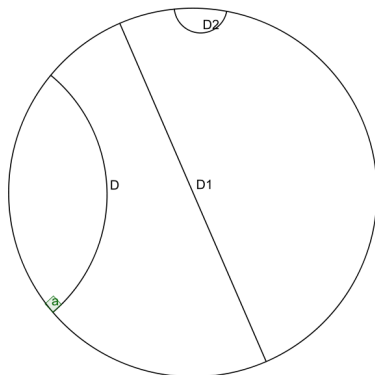
C.F. Gauss (1777-1855), J. Bolyai (1802-1860), N.I. Lobatchevski (1792-1856).

- ▶ Etant donné une droite a et un point A , il **n'existe pas** de droite qui passe par A et qui ne coupe pas a .
- ▶ Etant donné une droite a et un point A , il existe **plusieurs** droites qui passent par A et qui ne coupent pas a .

Disque de Poincaré

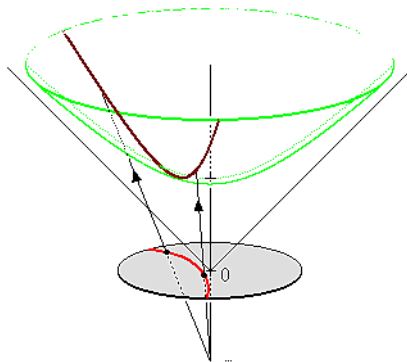
Henri Poincaré (1854-1912)

- ▶ On considère les points à l'intérieur d'un disque (pas au bord).
- ▶ Les droites sont les arcs de cercles perpendiculaires au bord et les droites passant par le centre du disque.



Intuition physique

Correspondance entre le disque de Poincaré et l'hyperboloïde.

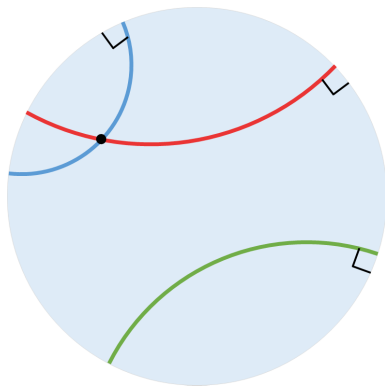


Intuition physique



Parallèles dans le disque de Poincaré

Parallèles dans le disque de Poincaré



Les droites rouge et bleue sont parallèles à la droite verte.

Mesures d'angles en radians

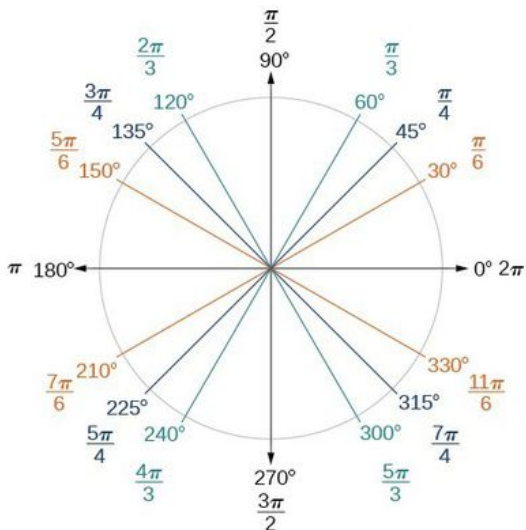
$\pi = 3,141592\dots$ Nombre irrationnel

On mesure les angles en degrés ou en radians.

angle plat = 180 degrés = π radians

| Degrees | Radians | Degrees | Radians | Degrees | Radians | Degrees | Radians |
|------------|-----------------|-------------|------------------|-------------|------------------|-------------|-------------------|
| 0° | 0 | 90° | $\frac{\pi}{2}$ | 180° | π | 270° | $\frac{3\pi}{2}$ |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | 120° | $\frac{2\pi}{3}$ | 210° | $\frac{7\pi}{6}$ | 300° | $\frac{5\pi}{3}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | 135° | $\frac{3\pi}{4}$ | 225° | $\frac{5\pi}{4}$ | 315° | $\frac{7\pi}{4}$ |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | 150° | $\frac{5\pi}{6}$ | 240° | $\frac{4\pi}{3}$ | 330° | $\frac{11\pi}{6}$ |

Mesures d'angles en radians



Le triangle

Théorème 1 (Axiome d'Euclide)

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à π (un angle plat).

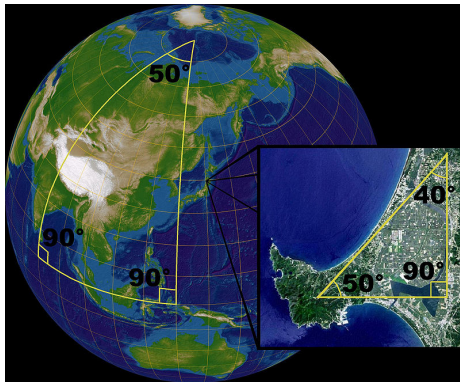
Théorème 2 (Sur la sphère de rayon 1)

La somme des mesures des angles d'un triangle d'aire T est égale à $\pi + T$.

Théorème 3 (Dans le disque de Poincaré de rayon 1)

La somme des mesures des angles d'un triangle d'aire T est égale à $\pi - T$.

Triangle sphérique



Aire des fuseaux et des triangles sphériques

Formule de l'aire (surface) d'une sphère : $4\pi r^2$.

Aire des fuseaux et des triangles sphériques

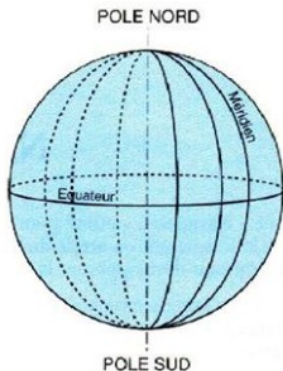
Formule de l'aire (surface) d'une sphère : $4\pi r^2$. On prend une sphère de rayon 1.

Aire de la sphère = 4π .

Aire des fuseaux et des triangles sphériques

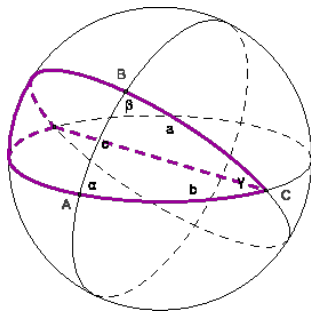
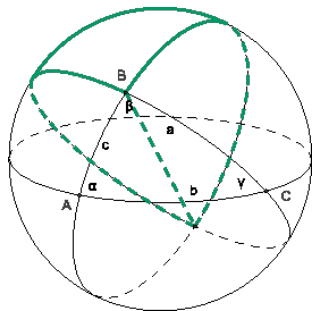
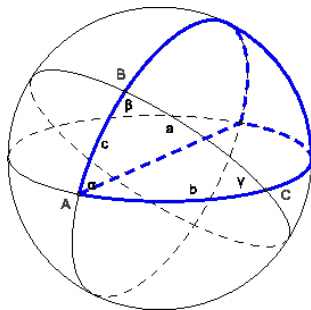
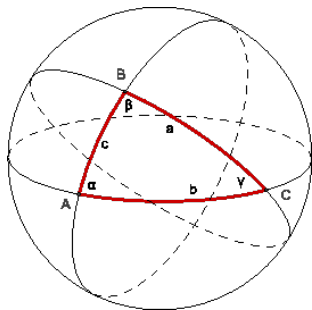
Formule de l'aire (surface) d'une sphère : $4\pi r^2$. On prend une sphère de rayon 1.

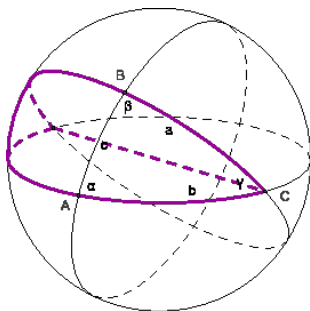
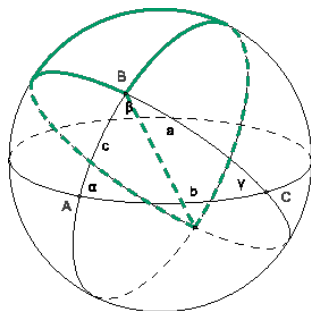
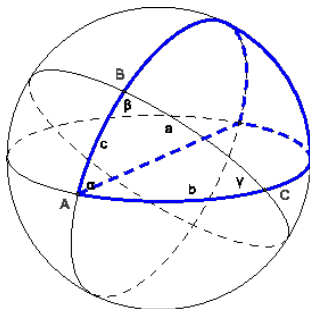
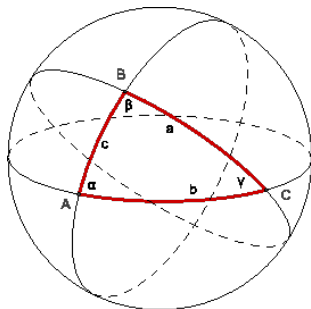
Aire de la sphère = 4π .



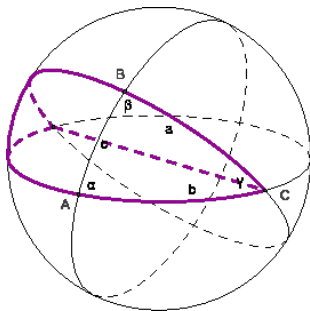
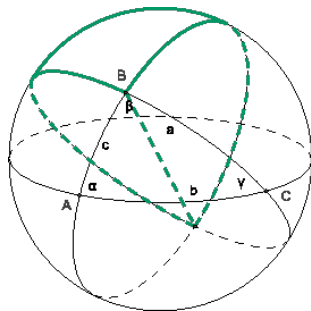
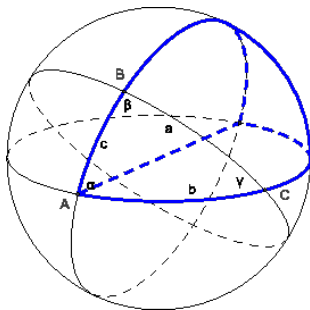
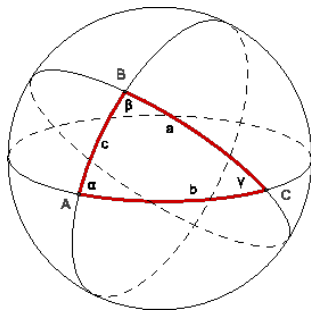
Par une règle de 3, on obtient :

$$(\text{Aire d'un fuseau d'angle } \alpha) = 4\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha.$$





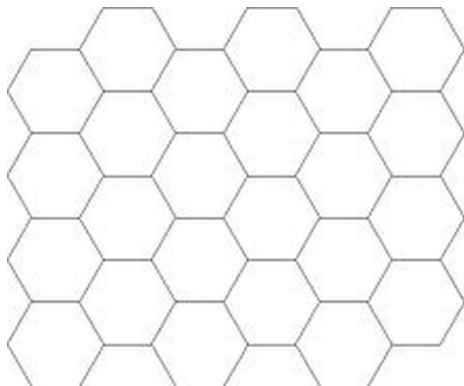
$$\text{Aire des 3 fuseaux} = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \frac{\text{Aire Sphère}}{2} + 2T = \frac{4\pi}{2} + 2T$$



$$\text{Aire des 3 fuseaux} = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \frac{\text{Aire Sphère}}{2} + 2T = \frac{4\pi}{2} + 2T$$

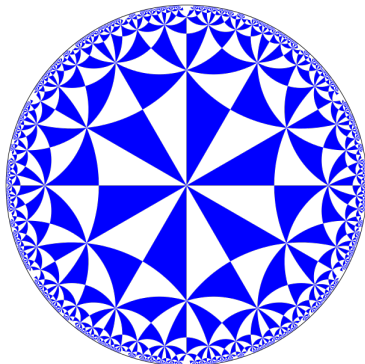
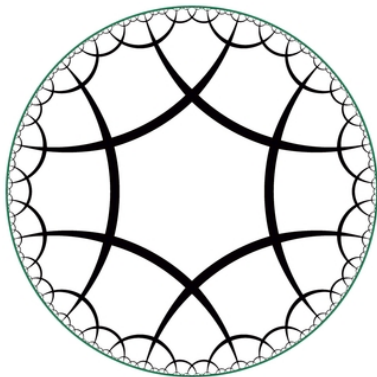
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + T$$

Pavage du plan par des hexagones



Pavage du disque par des hexagones

Pavage du disque par des hexagones



Indépendance de l'axiome d'Euclide

Impossibilité de prouver l'axiome d'Euclide à partir des autres car

- ▶ A l'intérieur de la géométrie euclidienne on a construit la géométrie non euclidienne.
- ▶ Vice-versa, à l'intérieur de la géométrie non euclidienne, on peut construire la géométrie euclidienne.

Axiomes d'Hilbert (1890-1900)

Hilbert propose 8 définitions et 20 axiomes concernant le comportement des points, droites et plans.



Axiomes d'Hilbert (1890-1900)

En voici quelques-uns.

- ▶ Il existe une droite liée à deux points donnés A et B , à laquelle appartiennent ces deux points.
- ▶ Il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points A et B .
- ▶ Sur une droite, il y a au moins 2 points ; il existe au moins 3 points non alignés.

Définition d'angle,...

- ▶ Axiome d'Euclide.
- ▶ Axiome d'archimède : Si AB et CD sont deux segments quelconques, il existe un nombre entier n tel que le report du segment CD répété n fois à partir de A sur la demi-droite déterminée par B conduit à un point situé au delà de B .

Impact des géométries non euclidiennes

Les géométries non euclidiennes permettent d'**étudier les surfaces courbes** :

- ▶ la sphère ;
- ▶ le disque de Poincaré qui correspond à l'hyperboloïde.

Physique relativiste : la lumière prend des trajectoires courbes.
Déformation de l'espace à proximité d'objets de grande masse
(champ gravitationnel).



Yves, moine de Saint-Denis, Vie de saint Denis,
France (Paris), 1317

Cité idéale (renaissance italienne)



Bartolomeo Corradini, dit Fra Carnevale (? - 1484)

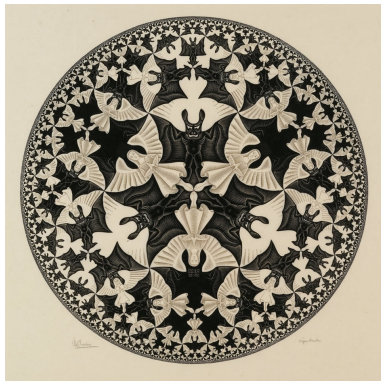


Francesco di Giorgio Martini (1439 - 1502)

Architecture contemporaine : Zaha Hadid (1950-2016)



Zaha Hadid Architects, Heydar Aliyev Center,
Bakou (Azerbaïdjan).



M.C. Escher, Limite circulaire IV (Ciel et enfer), 1960, gravure sur bois en noir et taupe sur papier japon, Musée des beaux-arts du Canada, don de George Escher, Mahone Bay, Nouvelle-Écosse, 1983. © The M.C. Escher Company – Baarn, Pays-Bas, 2016.






A voir et à lire

Conférences d'Etienne Ghys, sur YOUTUBE

Et si le théorème de Pythagore n'était pas vrai ?

A lire

-  D. Hilbert, *Fondements de la géométrie* (traduction), Dunod, 1971.
-  J.M. Lee, *Axiomatic Geometry*, Pure and Applied Undergraduate Texts, 21. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
-  D. Perrin, *Les géométries non euclidiennes*, texte en ligne <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Romilly.pdf>.