Questions de finale de l'OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE

MINI FINALES 2022–2024

Une organisation de la

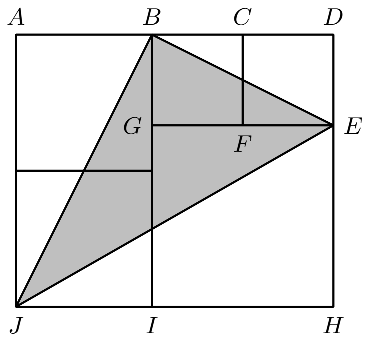
1. Énoncés des questions

Question 1 – 2022

Quel est le plus grand nombre premier qui divise $10^{22} + 10^{23} + 10^{24}$?

Question 2 – 2022

Le rectangle $AJHD$ est composé de cinq carrés, comme sur la figure ci-dessous. Si la longueur du segment $[BC]$ est 16, quelle est l'aire du triangle ombré BJE ?



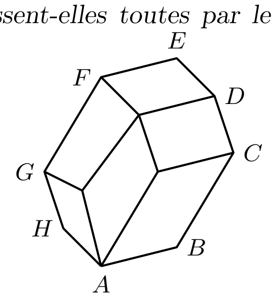
Question 3 – 2022

L'octogone $ABCDEFGH$ est composé de 6 parallélogrammes, comme indiqué sur la figure imprécise ci-contre.

a) Le quadrilatère $CDGH$ est-il un parallélogramme ?

b) Le quadrilatère $DFHB$ est-il un parallélogramme ?

c) Les droites AE, BF, CG et DH sont-elles concourantes, c'est-à-dire passent-elles toutes par le même point ?

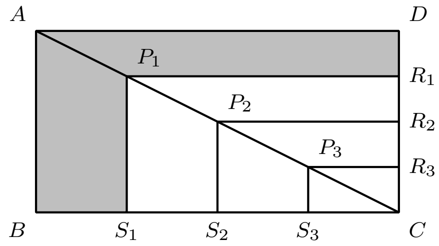


Question 4 – 2022

La diagonale $[AC]$ d'un rectangle $ABCD$ est partagée en quatre parties égales par les points P_1, P_2 et P_3, comme sur la figure ci-dessous. Les points R_1, R_2 et R_3 sont les projections orthogonales sur $[CD]$ des points P_1, P_2 et P_3 respectivement. Les points S_1, S_2 et S_3 sont les projections orthogonales sur $[BC]$ des points P_1, P_2 et P_3 respectivement. L'aire du rectangle $ABCD$ vaut 1.

a) Quelle est l'aire du rectangle $CR_1P_1S_1$?

b) Quelle est l'aire du polygone ombré $S_1P_1R_1DAB$?



c) Sur une nouvelle figure, partageons à présent la diagonale $[AC]$ en huit parties égales par de nouveaux points $P_1, P_2, \ldots, P_7$ et construisons les points $R_1, R_2, \ldots, R_7$ et $S_1, S_2, \ldots, S_7$ par le même procédé que dans le cas du partage de la diagonale en quatre. Quelle est maintenant l'aire du polygone $S_1P_1R_1DAB$?

Question 5 – 2022

Harpagon entasse des pièces d'or dans des sacs de la manière suivante : le premier contient une pièce, le second deux pièces, le troisième trois pièces et Harpagon continue d'augmenter le nombre de pièces par sac d'une unité. Le sac le plus rempli contient n pièces. Ensuite, il ajoute ou retire des pièces en choisissant à chaque fois une des deux règles suivantes :

— *il choisit trois sacs distincts parmi les n sacs ; dans l'un il ajoute une pièce, dans un autre, deux pièces et dans le dernier, trois pièces ;*
— *ou il choisit deux sacs contenant au moins deux pièces chacun ; il retire deux pièces de chacun de ces sacs.*

Très riche, Harpagon dispose de pièces à volonté.

a) Si $n = 5$, peut-il obtenir 5 sacs de 5 pièces ? Si oui, comment ?

b) Si $n = 6$, peut-il obtenir 6 sacs de 6 pièces ? Si oui, comment ?

c) Si $n = 7$, peut-il obtenir 7 sacs de 7 pièces ? Si oui, comment ?

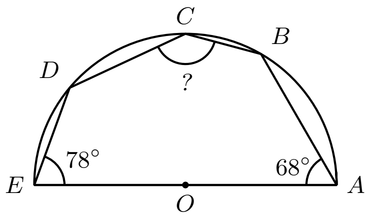
d) Si $n = 2022$, peut-il obtenir 2022 sacs de 2022 pièces ? Si oui, comment ?

Question 1 – 2023

Dans une petite ville, il n'y a qu'une ligne de tram, en forme de cercle, et les trams y circulent à vitesse constante dans les deux sens. Sur cette ligne, il y a, entre autres, un arrêt pour le Cirque, un pour le Parc et un pour le Zoo.
Du Parc au Zoo, le temps de trajet en tram en passant par le Cirque est le triple du temps de trajet sans passer par le Cirque. Du Cirque au Zoo en passant par le Parc, le temps de trajet est la moitié du temps de trajet sans passer par le Parc.
Un des trajets du Parc au Cirque en passant ou non par le Zoo est plus long que l'autre. Lequel ? Et quel est le rapport des temps de trajet du Parc au Cirque, en passant ou non par le Zoo ?

Question 2 – 2023

Le pentagone $ABCDE$ est inscrit au demi-cercle de diamètre $[AE]$ et de centre O, comme sur la figure imprécise ci-dessous ; ses angles $\widehat{A}$ et $\widehat{E}$ mesurent respectivement $68°$ et $78°$. Quelle est la mesure en degrés de $\widehat{C}$?



Question 3 – 2023

Le score d'un nombre naturel est défini comme étant la somme de ses chiffres. Par exemple, le score de 2023 est $2+0+2+3=7$.

a) *Quel est le plus petit nombre naturel de score 20 ?*

b) *Quel est le plus petit nombre naturel ne s'écrivant qu'avec des 2 et des 3 et dont le score est 23 ?*

c) *Quel est le plus grand nombre naturel ne s'écrivant qu'avec des 2 et des 3 et dont le score est 23 ?*

d) *Quel est le plus petit nombre naturel de score 2023 ?*

Question 4 – 2023

Camille écrit la liste des nombres entiers de 1 à 1000 inclus et calcule la somme S des nombres de sa liste.

a) *Dans chacun des nombres de la liste de Camille, Marie-Pierre remplace chaque chiffre 2 par un 3 et, simultanément, chaque chiffre 3 par un 2 ; elle calcule la somme S' des 1000 nombres ainsi transformés. Que vaut la différence $S' - S$?*

b) *De son côté, dans chacun des nombres de la liste de Camille, Pierre-Marie remplace chaque chiffre 2 par un 3 et, simultanément, chaque chiffre 9 par un 8 ; il calcule la somme S'' des 1000 nombres ainsi transformés. Que vaut la différence $S'' - S$?*

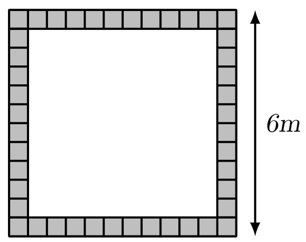
Question 5 – 2023

Claude veut carreler le pourtour intérieur de sa terrasse avec des dalles carrées sur un seul rang, comme l'indique l'exemple de la figure ci-dessous. La terrasse est un carré de 6 m de côté. L'épaisseur des joints entre les dalles est négligeable.

a) *Si la longueur du côté de chaque dalle est de 30 cm, combien de dalles sont utilisées ?*

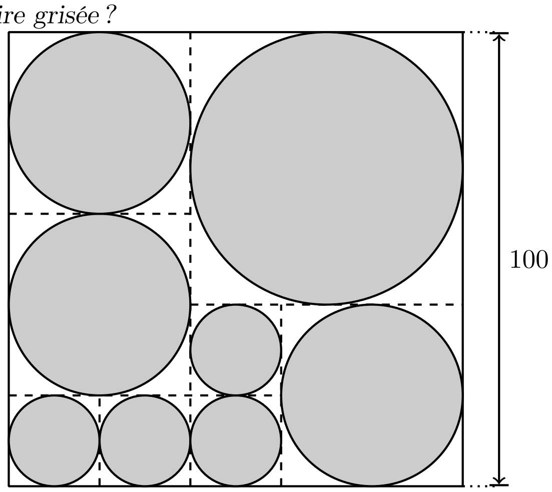
b) *Si le pourtour se compose de 56 dalles, quelle est la longueur du côté de chaque dalle ?*

c) *Si l'aire de la partie centrale, non dallée, est de $30{,}25\,m^2$, combien de dalles sont utilisées ?*



Question 1 – 2024

Dans la figure ci-dessous, des disques grisés sont inscrits dans des carrés ; le grand carré a des côtés de longueur 100. Quelle est l'aire grisée ?



Question 2 – 2024

Les figures suivantes sont construites de manière répétitive. La figure 1 est un hexagone régulier avec des côtés de longueur 1. La figure 2 est un hexagone régulier avec des côtés de longueur 2 qui est partiellement superposé au premier hexagone de façon à partager le sommet S. De même, pour chaque valeur de n ($n > 1$), la figure n est composée d'un hexagone régulier avec des côtés de longueur n superposé aux figures précédentes et partageant toujours le sommet S. La longueur totale des lignes de la figure n est notée $L(n)$.

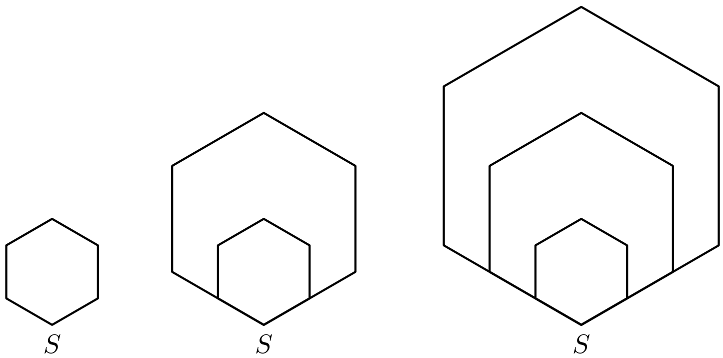


Fig. 1 : $n = 1$ $L(1) = 6$ *Fig.* 2 : $n = 2$ $L(2) = 16$ *Fig.* 3 : $n = 3$ $L(3) = 30$

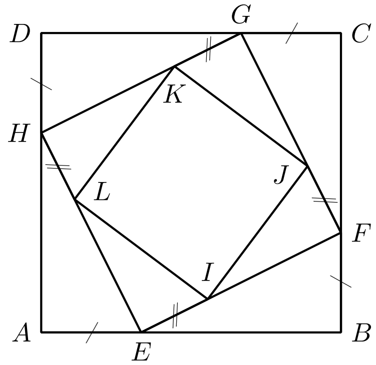
a) Que vaut $L(4)$?

b) Que vaut la différence entre $L(10)$ et $L(9)$?

c) Si n est un naturel supérieur à 2, que vaut la différence entre $L(n)$ et $L(n-1)$?

Question 3 – 2024

Le carré $IJKL$, d'aire 1, est inscrit dans le carré $EFGH$, lui-même inscrit dans le carré $ABCD$. De plus, $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = \frac{1}{3}\ |AB|$ et $|EI| = |FJ| = |GK| = |HL| = \frac{1}{3}\ |EF|$. Quelle est l'aire du carré $ABCD$?



Question 4 – 2024

Philippe s'intéresse aux nombres $M = 2024^{2023}$ et $N = 2023^{2024}$, ainsi qu'à leur somme S.

a) Quel est le dernier chiffre (celui de droite) de M ?

b) Quel est le dernier chiffre (celui de droite) de N ?

c) La somme S est-elle un nombre premier ?

Question 5 – 2024

Un distributeur automatique de billets ne délivre que des billets de 20 euros et de 50 euros. Ainsi, par exemple, retirer 100 euros au distributeur ne peut se faire que de deux manières : soit 5 billets de 20 euros, soit 2 billets de 50 euros.

a) Indiquer un montant que l'on peut retirer d'exactement trois façons.

b) Déterminer tous les montants différents que l'on peut retirer d'exactement trois façons.

2. Questions avec réponses

Question 1 – 2022

Quel est le plus grand nombre premier qui divise $10^{22} + 10^{23} + 10^{24}$?

Solution inspirée de celle de Giovanni Menna

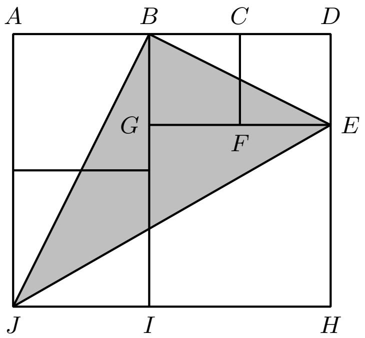
Le plus grand nombre premier divisant $10^{22} + 10^{23} + 10^{24}$ est 37.

En effet, nous pouvons réduire l'expression par mise en évidence et obtenir la décomposition en facteurs premiers :

$$10^{22} + 10^{23} + 10^{24} = 10^{22} \cdot (1 + 10 + 100) = 111 \cdot 10^{22} = 3 \cdot 37 \cdot 2^{22} \cdot 5^{22}$$

Question 2 – 2022

Le rectangle $AJHD$ est composé de cinq carrés, comme sur la figure ci-dessous. Si la longueur du segment $[BC]$ est 16, quelle est l'aire du triangle ombré BJE ?



Solution inspirée de celle de Nathan Techer

Puisque $|BC| = 16$, $|GE| = 2 \cdot |BC| = 16$; $|AJ| = 16 + 32 = 48$ et $|AD| = 24 + 16 + 16 = 56$.

L'aire ombrée est donc égale à

$$\begin{array}{rcl}
\mathscr{A}(BJE) & = & \mathscr{A}(ADHJ) - \mathscr{A}(ABJ) - \mathscr{A}(BDE) - \mathscr{A}(EHJ) \\
& = & |AJ| \cdot |AD| - \frac{1}{2}|AB| \cdot |AJ| - \frac{1}{2}|BD| \cdot |DE| - \frac{1}{2}|HJ| \cdot |EH| \\
& = & 48 \cdot 56 - \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 24 - \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 56 \\
& = & 2688 - 576 - 256 - 896 \\
& = & 960
\end{array}$$

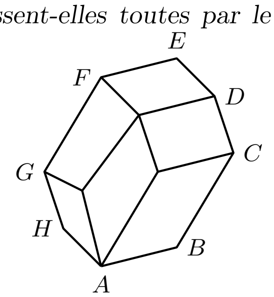
Question 3 – 2022

L'octogone $ABCDEFGH$ est composé de 6 parallélogrammes, comme indiqué sur la figure imprécise ci-contre.

a) Le quadrilatère $CDGH$ est-il un parallélogramme ?

b) Le quadrilatère $DFHB$ est-il un parallélogramme ?

c) Les droites AE, BF, CG et DH sont-elles concourantes, c'est-à-dire passent-elles toutes par le même point ?



On nomme les trois sommets centraux de sorte que trois des six parallélogrammes se nomment $AHGX$, $DEFY$ et $ABCZ$.

a) On utilise le fait qu'un parallélogramme est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles de même longueur. Puisque $AHGX$ est un parallélogramme, $GH//AX$ et $|GH| = |AX|$. De même $AXYZ$ est un parallélogramme, donc $AX//YZ$ et $|AX| = |YZ|$. Encore une fois, $CDYZ$ est un parallélogramme, $YZ//CD$ et $|YZ| = |CD|$. Ainsi,

$$GH//AX//YZ//CD \quad \text{et} \quad |GH| = |AX| = |YZ| = |CD|.$$

Le quadrilatère $CDGH$ est donc un parallélogramme.

b) Avec le même argument qu'au a), puisque $AHGX$ et $GXYF$ sont des parallélogrammes, $AHFY$ aussi. De même, puisque $ABCZ$ et $CDYZ$ sont des parallélogrammes, $ABDY$ aussi (le quadrilatère $DEFY$ étant un parallélogramme, $ABEF$ également ; ce sera utile dans la sous-question suivante). Une translation conservant parallélisme et longueur, $t_{\overrightarrow{YA}}(F) = H$, $t_{\overrightarrow{YA}}(D) = B$. Les segments $[FD]$ et $[HB]$ sont donc parallèles de même longueur et $DFHB$ est un parallélogramme.

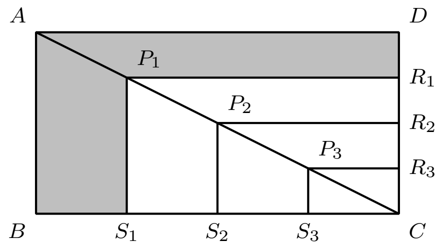
c) Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Du a), on déduit donc que $[CG]$ et $[DH]$ se coupent en leur milieu M. Du b) on déduit donc que M est aussi le milieu de $[FB]$. Comme enfin, on a vu que $ABEF$ est un parallélogramme, M est aussi le milieu de $[AE]$. Les droites AE, BF, CG et DH sont donc concourantes en M.

Question 4 – 2022

La diagonale $[AC]$ d'un rectangle $ABCD$ est partagée en quatre parties égales par les points P_1, P_2 et P_3, comme sur la figure ci-dessous. Les points R_1, R_2 et R_3 sont les projections orthogonales sur $[CD]$ des points P_1, P_2 et P_3 respectivement. Les points S_1, S_2 et S_3 sont les projections orthogonales sur $[BC]$ des points P_1, P_2 et P_3 respectivement. L'aire du rectangle $ABCD$ vaut 1.

a) Quelle est l'aire du rectangle $CR_1P_1S_1$?

b) Quelle est l'aire du polygone ombré $S_1P_1R_1DAB$?



c) Sur une nouvelle figure, partageons à présent la diagonale $[AC]$ en huit parties égales par de nouveaux points $P_1, P_2, \ldots, P_7$ et construisons les points $R_1, R_2, \ldots, R_7$ et $S_1, S_2, \ldots, S_7$ par le même procédé que dans le cas du partage de la diagonale en quatre. Quelle est maintenant l'aire du polygone $S_1P_1R_1DAB$?

Solution inspirée de celles d'Amaury Pringent et Noé Zech

a) La projection orthogonale gardant identiques les rapports de longueurs, $|R_1C| = \frac{3}{4}|DC|$ et $|C_1C| = \frac{3}{4}|BC|$. Ainsi,

$$\mathscr{A}(CR_1P_1S_1) = \frac{3}{4}|DC| \cdot \frac{3}{4}|BC| = \frac{9}{16}|DC| \cdot |BC| = \frac{9}{16} \cdot 1 = \frac{9}{16}.$$

b) L'aire du polygone ombré $S_1P_1R_1DAB$ est donc $1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$.

c) En utilisant le même procédé qu'en a), nous avons

$$\mathscr{A}(CR_1P_1S_1) = \frac{7}{8}|DC| \cdot \frac{7}{8}|BC| = \frac{49}{64}|DC| \cdot |BC| = \frac{49}{64}.$$

L'aire du polygone ombré $S_1P_1R_1DAB$ est donc $1 - \dfrac{49}{64} = \dfrac{15}{64}$.

Question 5 – 2022

Harpagon entasse des pièces d'or dans des sacs de la manière suivante : le premier contient une pièce, le second deux pièces, le troisième trois pièces et Harpagon continue d'augmenter le nombre de pièces par sac d'une unité. Le sac le plus rempli contient n pièces. Ensuite, il ajoute ou retire des pièces en choisissant à chaque fois une des deux règles suivantes :

- *il choisit trois sacs distincts parmi les n sacs ; dans l'un il ajoute une pièce, dans un autre, deux pièces et dans le dernier, trois pièces ;*
- *ou il choisit deux sacs contenant au moins deux pièces chacun ; il retire deux pièces de chacun de ces sacs.*

Très riche, Harpagon dispose de pièces à volonté.

a) Si $n = 5$, peut-il obtenir 5 sacs de 5 pièces ? Si oui, comment ?

b) Si $n = 6$, peut-il obtenir 6 sacs de 6 pièces ? Si oui, comment ?

c) Si $n = 7$, peut-il obtenir 7 sacs de 7 pièces ? Si oui, comment ?

d) Si $n = 2022$, peut-il obtenir 2022 sacs de 2022 pièces ? Si oui, comment ?

Solution inspirée de celles de Gaëlle Rogiest, Giovanni Menna, Eliot Warnant et Martin Lejeune

a) Commençons par rendre impair le nombre de pièces de chaque sac. Ensuite, augmentons les cinq nombres tout en les gardant impairs : pour cela, si nous ajoutons 1 et 3 pièces à deux sacs, nous ajouterons ensuite 3 et 1 pièces aux mêmes deux sacs. Enfin, nous retirons 2 et 2 pièces deux fois de sacs bien choisis. Voici le détail :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \overset{+2}{3} & \overset{+3}{5} & 3 & \overset{+1}{5} & 5 \\ \overset{+3}{6} & \overset{+2}{7} & \overset{+1}{4} & 5 & 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} \overset{+1}{7} & 7 & \overset{+3}{7} & \overset{+2}{7} & 5 \\ \overset{-2}{5} & \overset{-2}{5} & 7 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & \overset{-2}{5} & \overset{-2}{5} & 5 \end{array}$$

b) Cela est impossible. L'opération d'ajout augmente le nombre total de pièces de $1 + 2 + 3 = 6$ et l'opération de retrait le diminue de $2 + 2 = 4$. Comme 6 et 4 sont des nombres pairs, la parité du nombre total de pièces est constante. Or au départ nous avons $1+2+3+4+5+6 = 21$ pièces, mais nous voudrions terminer avec $6 \cdot 6 = 36$ pièces. Comme ces deux nombres ont des parités différentes, c'est impossible.

c) C'est impossible. La première opération change la parité de deux des nombres de pièces dans les sacs, la deuxième opération aucune de ces parités. Mais au départ 4 des nombres sont impairs (1, 3, 5 et 7) tandis qu'à l'arrivée souhaitée les 7 nombres sont impairs. Comme 4 et 7 n'ont pas la même parité, c'est impossible.

d) C'est à nouveau impossible. Comme au b), vérifions que le nombre total de pièces au départ et celui à l'arrivée (souhaitée) sont de parités différentes. Au départ, parmi les nombres 1, 2, …, 2 022 il y en a 1 011 qui sont impairs et 1 011 est impair, donc le nombre total de pièces est impair. À l'arrivée, tous les nombres sont pairs, donc leur somme aussi.

Question 1 – 2023

Dans une petite ville, il n'y a qu'une ligne de tram, en forme de cercle, et les trams y circulent à vitesse constante dans les deux sens. Sur cette ligne, il y a, entre autres, un arrêt pour le Cirque, un pour le Parc et un pour le Zoo.
Du Parc au Zoo, le temps de trajet en tram en passant par le Cirque est le triple du temps de trajet sans passer par le Cirque. Du Cirque au Zoo en passant par le Parc, le temps de trajet est la moitié du temps de trajet sans passer par le Parc.
Un des trajets du Parc au Cirque en passant ou non par le Zoo est plus long que l'autre. Lequel ? Et quel est le rapport des temps de trajet du Parc au Cirque, en passant ou non par le Zoo ?

Solution inspirée de celle de Julien Wellens

Désignons par x la longueur de l'arc de cercle du parc (P) au zoo (Z) sans passer par le cirque ($\cancel{C}$) et notons cette expression $P \xrightarrow{\cancel{C}} Z = x$. Nous pouvons donc écrire $P \xrightarrow{C} Z = 3x$. Si y est la distance du cirque au zoo en passant par le parc, nous avons $C \xrightarrow{P} Z = y$ et $C \xrightarrow{\cancel{P}} Z = 2y$. Si k est la circonférence du cercle,

$$\left(P \xrightarrow{\cancel{C}} Z\right) + \left(P \xrightarrow{C} Z\right) = k \quad \text{et} \quad \left(C \xrightarrow{P} Z\right) + \left(C \xrightarrow{\cancel{P}} Z\right) = k$$

ou encore $x + 3x = k$ et $y + 2y = k$ dont on tire $y = \frac{4}{3}\,x$.

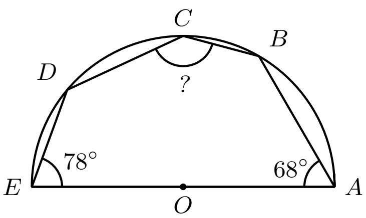
Nous devons trouver $P \xrightarrow{Z} C$ et $P \xrightarrow{\cancel{Z}} C$, alors que $P \xrightarrow{Z} C + P \xrightarrow{\cancel{Z}} C = k$.

Mais $P \xrightarrow{Z} C = P \xrightarrow{\cancel{C}} Z + C \xrightarrow{\cancel{P}} Z = x + 2y = x + 2\frac{4x}{3} = \frac{11x}{3}$. Et donc $P \xrightarrow{\cancel{Z}} C = k - \frac{11x}{3} = 4x - \frac{11x}{3} = \frac{x}{3}$. Le chemin du parc ($P$) au cirque ($C$) passant par le zoo ($Z$) est donc plus long que celui ne passant pas par le zoo ($\cancel{Z}$) et leur rapport est

$$\frac{P \xrightarrow{Z} C}{P \xrightarrow{\cancel{Z}} C} = \frac{(11x)/3}{x/3} = 11.$$

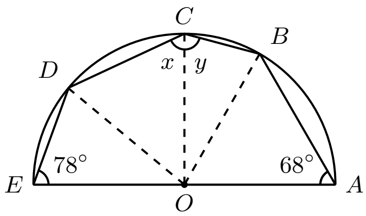
Question 2 – 2023

Le pentagone $ABCDE$ est inscrit au demi-cercle de diamètre $[AE]$ et de centre O, comme sur la figure imprécise ci-dessous ; ses angles $\widehat{A}$ et $\widehat{E}$ mesurent respectivement $68°$ et $78°$. Quelle est la mesure en degrés de $\widehat{C}$?



Solution de Zexiao Wang

Traçons les segments $[OD]$, $[OC]$ et $[BO]$ (qui sont de même longueur puisqu'il s'agit de rayons), faisant apparaître ainsi quatre triangles isocèles ; et notons $|\widehat{OCD}| = x$ et $|\widehat{OCB}| = y$.



On en déduit que

- $|\widehat{EDO}| = 78°$ (car EOD est un triangle isocèle),
  et donc que $|\widehat{EOD}| = 180° - 78° - 78° = 24°$;
- $|\widehat{ABO}| = 68°$ (car AOB est un triangle isocèle),
  et donc que $|\widehat{AOB}| = 180° - 68° - 68° = 44°$.

Dès lors $|\widehat{DOB}| = 180° - 24° - 44° = 112°$.

Or, $|\widehat{DOC}| = 180° - 2x$ et $|\widehat{COB}| = 180° - 2y$.

Ainsi $|\widehat{DOB}| = |\widehat{DOC}| + |\widehat{COB}| = (180° - 2x) + (180° - 2y) = 360° - 2(x + y)$.

On en conclut que $360° - 2(x + y) = 112°$, c'est-à-dire $x + y = 124°$.

Finalement $\boxed{|\widehat{DCB}| = x + y = 124°}$.

Question 3 – 2023

Le score d'un nombre naturel est défini comme étant la somme de ses chiffres. Par exemple, le score de 2023 *est* $2 + 0 + 2 + 3 = 7$.

a) Quel est le plus petit nombre naturel de score 20 *?*

b) Quel est le plus petit nombre naturel ne s'écrivant qu'avec des 2 *et des* 3 *et dont le score est* 23 *?*

c) Quel est le plus grand nombre naturel ne s'écrivant qu'avec des 2 *et des* 3 *et dont le score est* 23 *?*

d) Quel est le plus petit nombre naturel de score 2023 *?*

Solution inspirée de celles de Clément Durdu et Adrien Michaux

Au moins un nombre naturel est composé de chiffres, au plus il est petit. Pour avoir un petit nombre, il vaut donc mieux qu'il soit composé de peu de chiffres ayant la plus grande valeur possible.

a) Dans ce cas-ci, nous utilisons le plus de 9 possible. La division de 20 par 9 donne la relation $20 = 2 \cdot 9 + 2$, donc le naturel cherché est composé de deux 9 et un 2. Pour former le plus petit nombre, nous rangeons les chiffres par ordre croissant et nous obtenons 299.

b) On cherche le plus petit naturel de score 23 dont les chiffres sont 2 et 3. Nous utilisons donc le plus de 3 possible. La division de 23 par 3 donne la relation $23 = 7 \cdot 3 + 2$, donc le naturel est formé de sept 3 et un 2 qui sont rangés par ordre croissant pour avoir le plus petit nombre qui est 23 333 333.

c) Comme il faut le plus grand naturel possible, nous utilisons le plus de 2 possible pour que le nombre contienne le plus de chiffres possibles. La division de 23 par 2 donne la relation $23 = 11 \cdot 2 + 1$ qui ne permet pas d'écrire de naturel avec des 2 et des 3. Nous choisissons la relation $23 = 10 \cdot 2 + 3$ qui permet d'écrire un naturel composé de dix 2 et un 3 que nous allons mettre dans l'ordre décroissant pour avoir le plus grand naturel qui est 3 suivi de dix 2.

d) Comme expliqué dans le préambule, il faut utiliser le plus de 9 possible. La division de 2023 par 9 donne la relation $2023 = 224 \cdot 9 + 7$. Le naturel est composé de deux cent vingt-quatre 9 et un 7 qui sont classés par ordre croissant pour avoir le plus petit nombre qui est donc 7 suivi de 224 chiffres 9.

Question 4 – 2023

Camille écrit la liste des nombres entiers de 1 *à* 1000 *inclus et calcule la somme* S *des nombres de sa liste.*

a) Dans chacun des nombres de la liste de Camille, Marie-Pierre remplace chaque chiffre 2 *par un* 3 *et, simultanément, chaque chiffre* 3 *par un* 2 *; elle calcule la somme* S' *des* 1000 *nombres ainsi transformés. Que vaut la différence* $S' - S$ *?*

b) De son côté, dans chacun des nombres de la liste de Camille, Pierre-Marie remplace chaque chiffre 2 *par un* 3 *et, simultanément, chaque chiffre* 9 *par un* 8 *; il calcule la somme* S'' *des* 1000 *nombres ainsi transformés. Que vaut la différence* $S'' - S$ *?*

Solution de Michel Yang

a) Pour chaque nombre s'écrivant avec un chiffre 3 et qui est remplacé par un chiffre 2, on trouve autant de nombres s'écrivant avec un chiffre 2 et qui a été remplacé par un chiffre 3. Les nombres de la somme S changent juste de place mais pas de valeur dans l'écriture de la somme S'. Donc $S' - S = 0$.

b) Lorsque qu'on remplace un chiffre 2 par un chiffre 3, la somme S s'accroit de 1, de 10 ou de 100. Mais chaque fois qu'on remplace un chiffre 9 par un chiffre 8, la somme S décroit de 1, de 10 ou de 100. Comme il y a autant de 2 que de 9 dans l'écriture des unités, autant de 2 que de 9 dans l'écriture des dizaines et autant de 2 que de 9 dans l'écriture des centaines ; les $+1$ et -1, les $+10$ et les -10, les $+100$ et les -100 se compensent exactement dans S''. Donc $S'' - S = 0$.

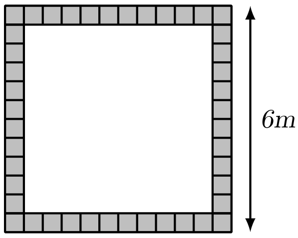
Question 5 – 2023

Claude veut carreler le pourtour intérieur de sa terrasse avec des dalles carrées sur un seul rang, comme l'indique l'exemple de la figure ci-dessous. La terrasse est un carré de 6 m de côté. L'épaisseur des joints entre les dalles est négligeable.

a) Si la longueur du côté de chaque dalle est de 30 cm, combien de dalles sont utilisées ?

b) Si le pourtour se compose de 56 dalles, quelle est la longueur du côté de chaque dalle ?

c) Si l'aire de la partie centrale, non dallée, est de 30,25 m^2, combien de dalles sont utilisées ?



Solution de Raphaël Valkeners

a) Le nombre de dalles de 30 cm que nous pouvons placer sur une longueur de 600 cm est $\frac{600}{30} = 20$. La terrasse ayant 4 côtés, il nous en faut $20 \times 4 = 80$. Mais les dalles des coins sont comptées deux fois. Donc, il en faudra $(80 - 4) = 76$.

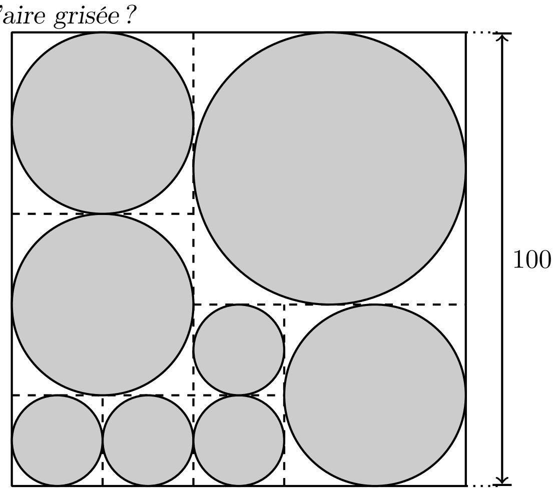
b) Comptons deux fois les dalles des coins de la terrasse pour arriver à $56 + 4 = 60$ dalles, donc à 15 dalles sur chaque côté de la terrasse. Ces 15 dalles sont sur un côté de 600 cm. Le côté de chacune d'elle est ainsi $\frac{600}{15} = 40$ cm.

c) Le côté du carré intérieur non dallé de la terrasse est $\sqrt{30,25} = 5,5$ m. Deux bords extérieurs correspondant aux côtés de 2 dalles valent 6 m$-$5,5 m$=$ 0,5 m. Le côté d'une dalle est $\frac{50}{2} = 25$ cm. Le nombre de dalles de 25 cm que nous pouvons placer sur une longueur de 600 cm est $\frac{600}{25} = 24$.

La terrasse ayant 4 côtés, il nous en faut $24 \times 4 = 96$. Mais les dalles des coins sont comptées deux fois. Ainsi, il en faudra $96 - 4 = 92$.

Question 1 – 2024

Dans la figure ci-dessous, des disques grisés sont inscrits dans des carrés ; le grand carré a des côtés de longueur 100. Quelle est l'aire grisée ?



Solution de Albert Kristensen

L'aire des disques grisés inscrits dans des carrés est indépendante du nombre de disques, car chaque disque est inscrit dans son propre carré, et l'ensemble des carrés circonscrits aux disques remplissent le grand carré. L'aire grisée serait donc la même s'il y avait eu seulement un grand disque inscrit dans le carré de côté de longueur 100.

Pour s'en convaincre, analysons le rapport $\dfrac{\mathscr{A}(\text{disque inscrit})}{\mathscr{A}(\text{carré})}$: il reste le même si nous augmentons le nombre de disques et de carrés.

Par exemple, si nous avons un disque inscrit dans un carré de côté de longueur 10 et un carré de côté longueur 5 :

$$\frac{\mathscr{A}(\text{d i})}{\mathscr{A}(\text{c})} = \frac{\pi \cdot 5^2}{10^2} = \frac{25\pi}{100} = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad \frac{\mathscr{A}(\text{d i})}{\mathscr{A}(\text{c})} = \frac{\pi \cdot 2{,}5^2}{5^2} = \frac{6{,}25\pi}{25} = \frac{25\pi}{100} = \frac{\pi}{4},$$

c'est-à-dire le même rapport.

En revenant à notre problème de départ, si nous voulons calculer l'aire grisée de tous les disques, nous pouvons dès lors imaginer un seul disque inscrit dans le carré de longueur 100. L'aire de cet unique disque, qui correspond à l'aire grisée demandée, est :

$$\mathscr{A}(\text{grisée}) = \pi r^2 = \pi \cdot 50^2 = 2\ 500\pi \simeq 7\,853{,}975$$

Question 2 – 2024

Les figures suivantes sont construites de manière répétitive. La figure 1 est un hexagone régulier avec des côtés de longueur 1. La figure 2 est un hexagone régulier avec des côtés de longueur 2 qui est partiellement superposé au premier hexagone de façon à partager le sommet S. De même, pour chaque valeur de n ($n > 1$), la figure n est composée d'un hexagone régulier avec des côtés de longueur n superposé aux figures précédentes et partageant toujours le sommet S. La longueur totale des lignes de la figure n est notée $L(n)$.

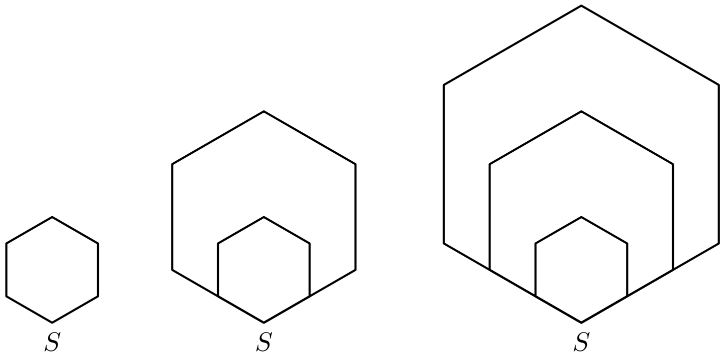


Fig. 1 : $n = 1$ — $L(1) = 6$ *Fig.* 2 : $n = 2$ — $L(2) = 16$ *Fig.* 3 : $n = 3$ — $L(3) = 30$

a) Que vaut $L(4)$?

b) Que vaut la différence entre $L(10)$ et $L(9)$?

c) Si n est un naturel supérieur à 2, que vaut la différence entre $L(n)$ et $L(n-1)$?

Solution de Benjaminas Krutejavas-Mazuras

Pour résoudre les questions de ce problème, on établit une formule pour la longueur des lignes $L(n)$. Celle-ci est égale à la somme des longueurs des n hexagones moins la somme des longueurs des côtés superposés des hexagones intérieurs.

- Somme des longueurs des n hexagones :

$$6n + 6(n-1) + 6(n-2) + \cdots + 6 \cdot 1 = 6[n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1] = 6\frac{(n+1)n}{2} = 3n^2 + 3n.$$

- Somme des longueurs des côtés superposés :

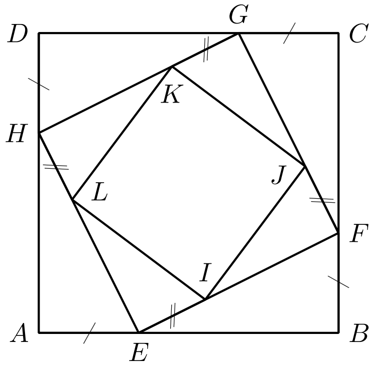
$$2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2 \cdot 1 = 2[(n-1) + (n-2) + \cdots + 1] = 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n.$$

- $L(n) = (3n^2 + 3n) - (n^2 - n) = 2n^2 + 4n.$

c) $L(n) - L(n-1) = 2n^2 + 4n - [2(n-1)^2 + 4(n-1)] = 4n + 2.$
a) $L(4) = 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 = 48.$
b) En utilisant la formule établie en c), $L(10) - L(9) = 4 \cdot 10 + 2 = 42.$

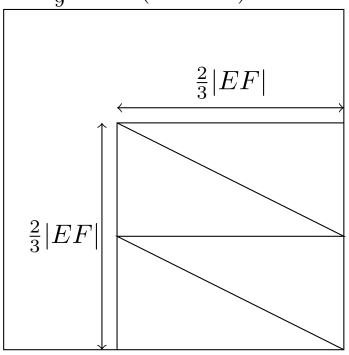
Question 3 – 2024

Le carré $IJKL$, d'aire 1, est inscrit dans le carré $EFGH$, lui-même inscrit dans le carré $ABCD$. De plus, $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = \dfrac{1}{3}\,|AB|$ et $|EI| = |FJ| = |GK| = |HL| = \dfrac{1}{3}\,|EF|$. Quelle est l'aire du carré $ABCD$?



Solution de Louis Dayez

L'aire de $ABCD$ est $\frac{81}{25}$ car, si on calcule l'aire du carré formé par FJI, EIL, HLK et GKJ, cela fait $\frac{4}{9}$ de $\mathscr{A}(EFGH)$:



$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Comme l'aire de ces 4 triangles est égale à l'aire de $\mathscr{A}(EFGH) - \mathscr{A}(IJKL)$, cela signifie que $\mathscr{A}(IJKL) = \frac{5}{9}\mathscr{A}(EFGH)$. Comme $\mathscr{A}(IJKL) = 1$, alors

$$\frac{5}{9}\mathscr{A}(EFGH) = 1 \iff \mathscr{A}(EFGH) = \frac{9}{5}.$$

Pour l'aire de $ABCD$, on applique la même technique $\big(\mathscr{A}(AEH) + \mathscr{A}(DHG) + \mathscr{A}(CGF) + \mathscr{A}(BFE) = \frac{4}{9}\mathscr{A}(ABCD)\big)$ avec les autres triangles.
On obtient ainsi que $\mathscr{A}(EFGH) = \frac{5}{9}\mathscr{A}(ABCD)$. Comme $\mathscr{A}(EFGH) = \frac{9}{5}$, alors

$$\frac{5}{9}\mathscr{A}(ABCD) = \frac{9}{5} \iff \mathscr{A}(ABCD) = \frac{9}{5} \cdot \frac{9}{5} \iff \mathscr{A}(ABCD) = \frac{81}{25}.$$

Question 4 – 2024

Philippe s'intéresse aux nombres $M = 2024^{2023}$ et $N = 2023^{2024}$, ainsi qu'à leur somme S.

a) Quel est le dernier chiffre (celui de droite) de M ?

b) Quel est le dernier chiffre (celui de droite) de N ?

c) La somme S est-elle un nombre premier ?

Solution de Louis Dayez

a) Le dernier chiffre de M est 4 car le dernier chiffre de 2024^2 est 6 (car $4 \times 4 = 16$) et que si on multiplie 6 par 2024, cela donnera 12 144. Lorsqu'on multiplie de nouveau par 2024, le nombre 12 144 se terminant par 4, on a de nouveau 6 comme dernier chiffre et ainsi de suite. On peut donc conclure que si l'exposant de 2024 est impair, alors le dernier chiffre est 4 alors que si l'exposant est non nul et pair, alors le dernier chiffre est 6. Comme 2023 est impair, alors le dernier chiffre de 2024^{2023} est 4.

b) Le dernier chiffre de N est 1 car, comme vu précédemment, il suffit de calculer en se limitant aux derniers chiffres. 2023×2023 devient donc 3×3. Comme cela donne 9, que 9×3 donne 27, que 7×3 donne 21 et que 1×3 donne 3, on peut conclure qu'il y a une suite avec 4 chiffres qui se répètent en tant que derniers chiffres de 2023^n. Ces 4 chiffres sont 3, 9, 7 et 1. Comme l'exposant de 2023 (ici 2024) est un multiple de 4, cela signifie que son dernier chiffre est 1 car 1 est à la fois le 4e et le 2024e élément de la suite.

c) Non, la somme S n'est pas un nombre premier car si on additionne le dernier chiffre de M et le dernier chiffre de N, on obtient $4 + 1 = 5$. Or tout nombre se terminant par 5 est multiple de 5 et donc n'est pas un nombre premier à part si c'est le chiffre 5 lui-même (ce qui n'est pas le cas ici). La somme S n'est donc pas un nombre premier.

Question 5 – 2024

Un distributeur automatique de billets ne délivre que des billets de 20 euros et de 50 euros. Ainsi, par exemple, retirer 100 euros au distributeur ne peut se faire que de deux manières : soit 5 billets de 20 euros, soit 2 billets de 50 euros.

a) Indiquer un montant que l'on peut retirer d'exactement trois façons.

b) Déterminer tous les montants différents que l'on peut retirer d'exactement trois façons.

Solution inspirée de celle de Horia Antohi

a) Le montant 200 € fonctionne, avec 0 billet de 50 € et 10 de 20 €, 2 billets de 50 € et 5 de 20 € ainsi que 4 billets de 50 € et 0 de 20 €. Avec plus de billets de 50 €, cela dépasse 200 € tandis qu'avec 1 ou 3 billets de 50 €, c'est impossible à compléter, il y a donc exactement 3 possibilités.

b) On remarque d'abord qu'un montant non multiple de 10 n'est pas atteignable. Les valeurs 20, 40, 60 et 80 ne sont atteignables qu'avec des billets de 20 €. Nommons reste r une variable pouvant prendre les valeurs 0, 20, 40, 60 ou 80. Nommons n le nombre de billets de 50 € que l'on prend et m le nombre maximal de fois qu'un billet de 50 € peut être pris afin d'obtenir le montant souhaité. Remarquons que si le montant souhaité est un multiple de 20, alors m est pair, sinon il est impair.

Le montant souhaité est de la forme $50n + 20\frac{m-n}{2} \cdot 5 + r$ où nous avons obligatoirement $n = m - 2a$ où a est un entier tel que $0 \leqslant 2a \leqslant m$. En conséquence, le nombre de façons de choisir n est $\frac{m+2}{2}$ si m est pair, et $\frac{m+1}{2}$ si m est impair. Donc si le nombre de manières doit être exactement 3, nous avons :

- Soit $\frac{m+2}{2} = 3 \Longleftrightarrow m = 4$ ($n = 0, 2, 4$) et les montants sont $200 + r$, soit 200 €, 220 €, 240 €, 260 € et 280 € ;
- Soit $\frac{m+1}{2} = 3 \Longleftrightarrow m = 5$ ($n = 1, 3, 5$) et les montants sont $250 + r$, soit 250 €, 270 €, 290 €, 310 € et 330 €.