Questions de finale de l'OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE

MIDI FINALES 2022–2024

Une organisation de la

1. Énoncés des questions

Question 1 – 2022

Le triangle ABC est un triangle quelconque dont $[AC]$ est le plus grand côté. Les cercles de centre A passant par B et de centre C passant par B coupent $[AC]$ en D et E respectivement.

a) Si, dans le triangle ABC, les angles en A et en C mesurent respectivement $60°$ et $20°$, quelle est l'amplitude de $\widehat{EBD}$?

b) De manière générale, quelle est l'amplitude de $\widehat{EBD}$, en fonction de l'amplitude de $\widehat{ABC}$?

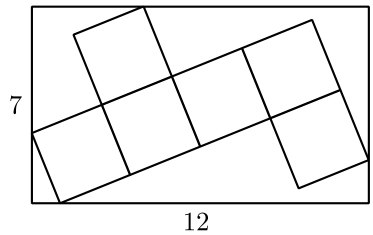
Question 2 – 2022

Ci-dessous, la notation $\overline{abc}$ représente le nombre dont les chiffres sont, de gauche à droite, a, b et c ; donc $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Par définition, la factorielle $n!$ du nombre naturel n non nul vaut $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ et la factorielle de zéro est $0! = 1$. Quels nombres $\overline{abc}$ à trois chiffres satisfont l'égalité suivante ?

$$\overline{abc} = a! + b! + c!$$

Question 3 – 2022

La figure ci-dessous est constituée de six carrés juxtaposés, de même côté, et d'un rectangle de côtés 12 et 7, circonscrit à l'assemblage des six carrés. Quelle est l'aire de l'un des six carrés ?



Question 4 – 2022

Cent athlètes sont placés en file, de gauche à droite, selon leur numéro de dossard de 1 à 100. Avant le départ de la course, un commissaire sportif annonce que certains athlètes sont disqualifiés pour cause de dopage. De ce fait, les n athlètes restants se déplacent d'un certain nombre de places vers la gauche, sans se dépasser, afin d'occuper toutes les places de gauche, de la $1^{\text{ère}}$ à la $n^{\text{ème}}$ place.

Il apparait alors que tous ceux qui restent ont été décalés d'un nombre différent de places. Quel est le plus petit nombre d'athlètes disqualifiés autorisant une telle situation ?

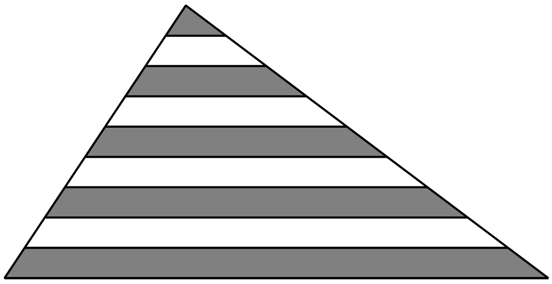
Question 1 – 2023

Deux sœurs ont des âges à deux chiffres. Quand ils sont juxtaposés (écrits l'un à côté de l'autre), le nombre à quatre chiffres obtenu est un carré parfait. Dans 23 ans, elles auront toujours des âges à deux chiffres qui, juxtaposés dans le même ordre, formeront à nouveau un carré parfait. Quels âges ont aujourd'hui ces deux sœurs ?

Question 2 – 2023

Un triangle est partagé en 9 bandes par des segments parallèles à un des côtés et équidistants, comme sur la figure ci-dessous. Les différentes bandes sont alternativement grises et blanches, celle qui est adjacente au côté étant grise.

a) *Si la somme des aires des bandes grises est égale à 145, que vaut la somme des aires des bandes blanches ?*



b) *Le triangle est maintenant partagé en n bandes, avec n impair et supérieur ou égal à 3 ; quel est le rapport de la somme des aires des bandes grises à la somme des aires des bandes blanches, en fonction de n ?*

Question 3 – 2023

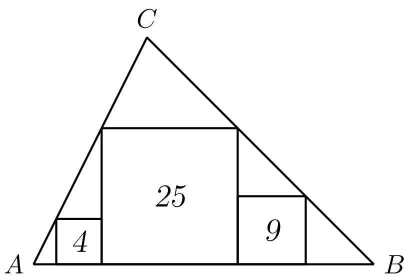
Par définition, la factorielle $n!$ d'un nombre naturel n non nul vaut $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$. Pour quelles valeurs de N la somme

$$1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + N!$$

est-elle un carré parfait ?

Question 4 – 2023

Quelle est l'aire du triangle ABC si les aires de trois carrés inscrits sont respectivement 4, 25, 9 comme dessiné sur la figure imprécise ci-dessous ?



Question 1 – 2024

Trouver tous les triplets $(a; b; c)$ de nombres entiers tels que $ab + c = 2023$ et $a + bc = 2024$.

Question 2 – 2024

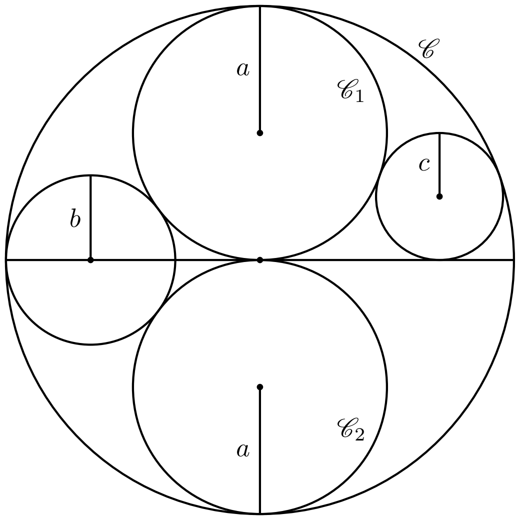
Une cuillère de sirop est versée d'une grande bouteille de sirop dans un petit verre d'eau, sans débordement. L'eau et le sirop sont alors soigneusement mélangés, puis une cuillère de même capacité est prélevée du verre et son contenu est entièrement versé dans la bouteille. Ainsi, la bouteille et le verre contiennent chacun une part de liquide « étranger », c'est-à-dire de l'eau dans le sirop de la bouteille et du sirop dans l'eau du verre.

a) *Lequel de la bouteille ou du verre contient la plus grande quantité de liquide « étranger » ?*

b) *Lequel de la bouteille ou du verre contient la plus grande proportion de liquide « étranger » ?*

Question 3 – 2024

Dans un grand cercle $\mathscr{C}$ de rayon 12, on inscrit deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de rayon a, tangents entre eux au centre de $\mathscr{C}$ et tangents au grand cercle. On inscrit ensuite un cercle de rayon b, tangent aux trois cercles déjà tracés et un cercle de rayon c, tangent à $\mathscr{C}$, à $\mathscr{C}_1$ et au diamètre de $\mathscr{C}$ tangent à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.



a) *Que vaut a ?*

b) *Que vaut b ?*

c) *Que vaut c ?*

Question 4 – 2024

Pour tout nombre naturel n, $P(n)$ représente l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui est un diviseur de n. Par exemple, $P(96) = 5$ car $2^5 = 32$ est un diviseur de 96 et $2^6 = 64$ ne l'est pas.

a) *Que vaut $P(336)$?*

b) *Si $P(a) = m$ et si $P(b) = n$, que vaut $P(a \cdot b)$?*

c) *Pour un nombre naturel n non nul, $n!$ est une abréviation pour $n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$. Que vaut $P(10!)$?*

d) *Que vaut $P(100!)$?*

2. Questions avec réponses

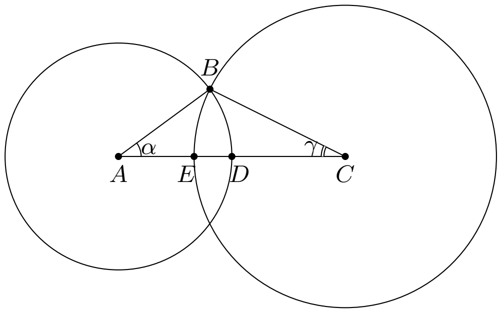
Question 1 – 2022

Le triangle ABC est un triangle quelconque dont $[AC]$ est le plus grand côté. Les cercles de centre A passant par B et de centre C passant par B coupent $[AC]$ en D et E respectivement.

a) Si, dans le triangle ABC, les angles en A et en C mesurent respectivement $60°$ et $20°$, quelle est l'amplitude de $\widehat{EBD}$?

b) De manière générale, quelle est l'amplitude de $\widehat{EBD}$, en fonction de l'amplitude de $\widehat{ABC}$?

Solution inspirée de celle de Clémence De Veuster



Soit α l'amplitude de l'angle $\widehat{CAB}$ et γ l'amplitude de l'angle $\widehat{BCA}$, on a donc

$$|\widehat{ABC}| = 180° - \alpha - \gamma.$$

Comme B et D appartiennent au cercle de centre A, $|AB| = |AD|$ et donc

$$|\widehat{ABD}| = |\widehat{BDA}| = \frac{1}{2}\,(180° - \alpha)\,.$$

De même B et E appartiennent au cercle de centre C, $|BC| = |CE|$ et donc

$$|\widehat{EBC}| = |\widehat{CEB}| = \frac{1}{2}\,(180° - \gamma)\,.$$

Or, les points A, E, D et C sont alignés puisqu'ils appartiennent à $[AC]$, ainsi

$$|\widehat{CEB}| = |\widehat{DEB}| = \frac{1}{2}\,(180° - \gamma) \text{ et } |\widehat{BDA}| = |\widehat{BDE}| = \frac{1}{2}\,(180° - \alpha)\,.$$

Dans le triangle BDE,

$$|\widehat{EBD}| = 180° - |\widehat{DEB}| - |\widehat{BDE}| = 180° - \frac{1}{2}\,(180° - \gamma) = \frac{1}{2}\,(180° - \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma).$$

Or $|\widehat{ABC}| = 180° - (\alpha + \gamma)$, on a ainsi donc $|\widehat{EBD}| = \dfrac{180° - |\widehat{ABC}|}{2}$.

On peut dès lors répondre à la question a) : dans le triangle ABC, on a

$$|\widehat{ABC}| = 180° - |\widehat{BCA}| - |\widehat{CAB}| = 180° - 20° - 60° = 100°.$$

Ainsi, on a immédiatement $|\widehat{EBD}| = \dfrac{180° - 100°}{2} = 40°$.

Question 2 – 2022

Ci-dessous, la notation $\overline{abc}$ représente le nombre dont les chiffres sont, de gauche à droite, a, b et c ; donc $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Par définition, la factorielle $n!$ du nombre naturel n non nul vaut $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ et la factorielle de zéro est $0! = 1$. Quels nombres $\overline{abc}$ à trois chiffres satisfont l'égalité suivante ?

$$\overline{abc} \;=\; a! + b! + c!$$

Solution de Maxime Caine

Comme $7! = 5\,040$ est un nombre à 4 chiffres, le chiffre des centaines a doit être strictement inférieur à 7. Si un des chiffres a, b ou c était égal à 6, on aurait $a! + b! + c! \geqslant 6! + 0! + 0! = 722$ alors que $a < 7$. Donc, chacun des chiffres a, b et c est inférieur ou égal à 5.

Mais alors a doit être inférieur ou égal à 3 car $a! + b! + c! \leqslant 3 \cdot 5! = 360$.

- $a \neq 3$, sinon on aurait $\overline{3bc} = 3! + b! + c!$ et $\overline{3bc} \geqslant 300 > 6 + 5! + 5! = 246$.
- $a \neq 2$, sinon on aurait $b = c = 5$ (pour que $\overline{abc} \geqslant 100$) et $255 \neq 2! + 5! + 5!$.

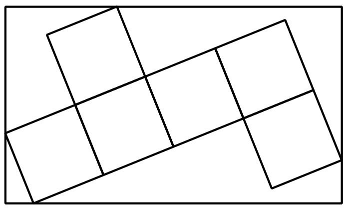
Le chiffre des centaines est donc égal à 1 et un seul des chiffres b ou c est égal à 5 pour que $100 \leqslant \overline{abc} < 200$.

- Si $b = 5$, on doit avoir $\overline{15c} = 1! + 5! + c! = 121 + c!$, avec $c \leqslant 4$:
  - $151 \neq 1! + 5! + 1! = 122$,
  - $152 \neq 1! + 5! + 2! = 123$,
  - $153 \neq 1! + 5! + 3! = 127$,
  - $154 \neq 1! + 5! + 4! = 145$.
- Si $c = 5$, on doit avoir $\overline{1b5} = 1! + b! + 5! = 121 + b!$, avec $b \leqslant 4$:
  - $115 \neq 1! + 5! + 1! = 122$,
  - $125 \neq 1! + 5! + 2! = 123$,
  - $135 \neq 1! + 5! + 3! = 127$,
  - $145 = 1! + 5! + 4! = 145$.

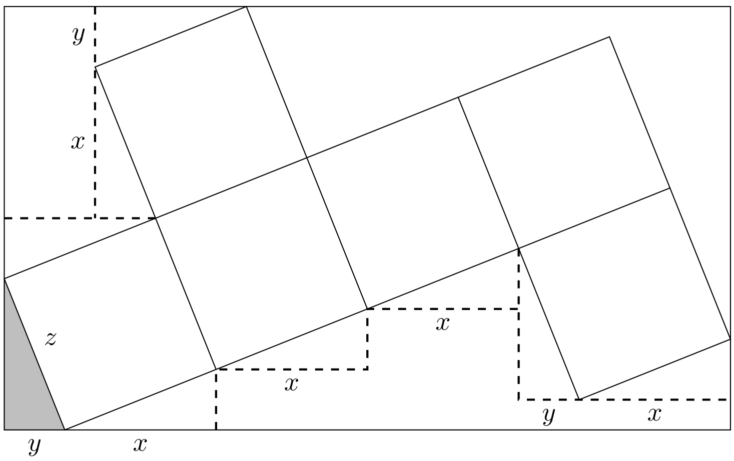
Le seul nombre naturel à trois chiffres qui satisfait à l'égalité $\overline{abc} = a! + b! + c!$ est 145.

Question 3 – 2022

La figure ci-dessous est constituée de six carrés juxtaposés, de même côté, et d'un rectangle de côtés 12 *et* 7*, circonscrit à l'assemblage des six carrés. Quelle est l'aire de l'un des six carrés ?*



Solution inspirée de celle de Stefan Andrian Albescu



Pour calculer la surface d'un carré, nous recherchons la longueur z d'un de ses côtés. Considérons le triangle rectangle (en gris sur la figure) déterminé par le carré dans le coin inférieur gauche du rectangle circonscrit. Son hypoténuse mesure z, et nous notons x et y les longueurs des côtés de l'angle droit, comme sur la figure.

Par rotation(s) de $\pm 90°$ et/ou translations successives, nous obtenons des copies isométriques de ce triangle comme indiqué en pointillés sur la figure. En considérant la longueur et la largeur du rectangle circonscrit, on obtient donc : $4x + 2y = 12$ et $2x + 2y = 7$.

En soustrayant ces équations membre à membre, on obtient : $2x = 5$, d'où $x = 2,5$. En injectant cette valeur dans la deuxième équation, on obtient : $2y = 7 - 2x = 7 - 5 = 2$, d'où $y = 1$.

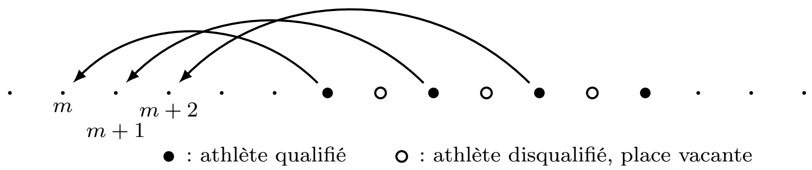
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle grisé, on a : $z^2 = x^2 + y^2 = 2{,}5^2 + 1^2 = 6{,}25 + 1 = 7{,}25$. Comme l'aire du carré vaut z^2, on a donc que cette aire vaut 7,25.

Question 4 – 2022

Cent athlètes sont placés en file, de gauche à droite, selon leur numéro de dossard de 1 *à* 100*. Avant le départ de la course, un commissaire sportif annonce que certains athlètes sont disqualifiés pour cause de dopage. De ce fait, les n athlètes restants se déplacent d'un certain nombre de places vers la gauche, sans se dépasser, afin d'occuper toutes les places de gauche, de la* $1^{\text{ère}}$ *à la* $n^{\text{ème}}$ *place.*
Il apparait alors que tous ceux qui restent ont été décalés d'un nombre différent de places. Quel est le plus petit nombre d'athlètes disqualifiés autorisant une telle situation ?

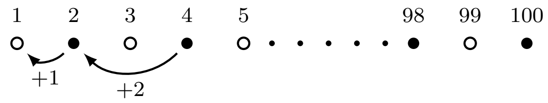
Solution de Clémence De Veuster

Deux athlètes voisins ne peuvent être tous les deux qualifiés car cela voudrait dire qu'ils se déplaceraient d'un même nombre de places. En effet, si un athlète se décale de m places vers la gauche son voisin de droite devra aussi se décaler de m places pour le rejoindre. La seule situation possible qui limite le nombre d'athlètes disqualifiés est celle où un athlète sur deux est disqualifié. Ainsi, chaque athlète est séparé d'une place vacante de son voisin de gauche et devra se déplacer d'une place de plus que ce voisin. Chaque athlète qualifié se déplacera donc d'un nombre différent de places que les autres.



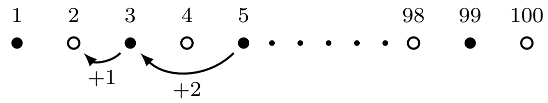
Comme le nombre d'athlètes est pair (100), il y a deux configurations possibles :

- L'athlète à l'extrême gauche est disqualifié et celui à l'extrême droite reste,



Dans cette configuration, chaque athlète se déplace d'un nombre de places correspondant à la sa nouvelle position dans la file.

- L'athlète à l'extrême gauche reste et celui à l'extrême droite est disqualifié.



Dans cette configuration, les athlètes qualifiés se déplacent d'une place de moins que celle correspondant à leur nouvelle position dans la file (le 1^{er} reste en place, le second se déplace d'une place, le troisième de deux places, etc.) .

On peut remarquer que c'est cette situation qui entraîne le moins de déplacements.

Dans chaque cas, le nombre de disqualifiés est égal à $\frac{100}{2} = 50$ et on ne peut pas en disqualifier moins.

Le nombre minimum d'athlètes qui peuvent être disqualifiés est donc égal à 50.

Question 1 – 2023

Deux sœurs ont des âges à deux chiffres. Quand ils sont juxtaposés (écrits l'un à côté de l'autre), le nombre à quatre chiffres obtenu est un carré parfait. Dans 23 ans, elles auront toujours des âges à deux chiffres qui, juxtaposés dans le même ordre, formeront à nouveau un carré parfait. Quels âges ont aujourd'hui ces deux sœurs ?

Solution inspirée de celle de Pierre Akin Dürrüoglu

Soient $m = 10x + y$ et $n = 10z + t$ ($x; y; z; t \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et $x \neq 0 \neq z$) les âges des deux sœurs. Il existe deux entiers strictement positifs a et b ($a < b$) tels que :

$$\begin{cases} a^2 = 1000x + 100y + 10z + t \\ b^2 = 1000x + 100y + 2300 + 10z + t + 23 \end{cases}$$

Ainsi, $b^2 - a^2 = 2323 \iff (b-a)(b+a) = 23 \cdot 101$

$$\iff \quad \begin{cases} b-a=1 \\ b+a=2323 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b-a=23 \\ b+a=101 \end{cases}$$

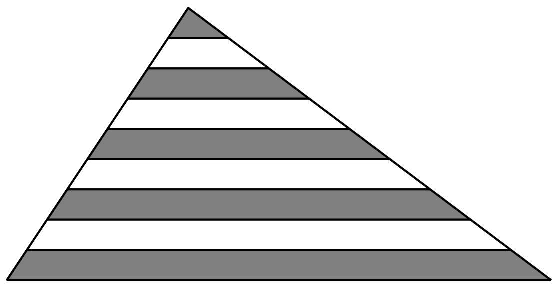
Dans le premier cas, $(a;b) = (1161;1162)$, mais a^2 a plus de quatre chiffres et cette solution est donc à rejeter.
Dans le deuxième cas, $(a;b) = (39;62)$ et $39^2 = 1000x + 100y + 10z + t$ nous donne $(x;y;z;t) = (1;5;2;1)$. Les âges des deux sœurs seraient alors 15 et 21 ans. Il reste cependant à s'assurer que toutes les égalités sont bien vérifiées et elles le sont.

$$39^2 = 1521 = 1000 + 500 + 20 + 1 \qquad 62^2 = 3844 = 1000 + 500 + 2300 + 20 + 1 + 23$$

Question 2 – 2023

Un triangle est partagé en 9 bandes par des segments parallèles à un des côtés et équidistants, comme sur la figure ci-dessous. Les différentes bandes sont alternativement grises et blanches, celle qui est adjacente au côté étant grise.

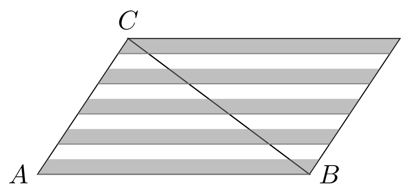
a) Si la somme des aires des bandes grises est égale à 145, que vaut la somme des aires des bandes blanches ?



b) Le triangle est maintenant partagé en n bandes, avec n impair et supérieur ou égal à 3 ; quel est le rapport de la somme des aires des bandes grises à la somme des aires des bandes blanches, en fonction de n ?

Solution de Thibault Guignard

Dupliquons le triangle, faisons tourner la copie et juxtaposons-la pour obtenir la figure suivante :



Dans le cas général, de n bandes avec n impair, la figure est alors composée de $\frac{n+1}{2}$ bandes grises et $\frac{n-1}{2}$ bandes blanches ; chacune des bandes étant un parallélogramme de base b et de hauteur $\frac{h}{n}$.
La somme des aires grises et blanches sont donc

$$S_g = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{h}{n} \cdot b \qquad S_b = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{h}{n} \cdot b$$

Par conséquent, le rapport de la surface grise et de la surface blanche est $r = \frac{n+1}{n-1}$.

Si on revient au triangle, la somme des aires grises (resp. blanches) est égale à la moitié de la somme des aires grises (resp. blanches) dans le parallélogramme. Le rapport est donc inchangé.

En appliquant la formule au cas du triangle à 9 bandes, on obtient 116 pour la question a).

Question 3 – 2023

Par définition, la factorielle $n!$ d'un nombre naturel n non nul vaut $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$. Pour quelles valeurs de N la somme

$$1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + N!$$

est-elle un carré parfait ?

Solution de Huda-Nur Mehmed

Listons les factorielles des premiers naturels :
$1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

À partir de $5!$, toutes les factorielles sont multiples de 10, puisqu'elles contiennent au moins un facteur 2 et un facteur 5. Leur chiffre des unités est donc égal à 0. Le chiffre des unités de $1!+2!+3!+4!+5!+\ldots$ est donc égal à celui de $1!+2!+3!+4!$, c'est-à-dire 3. Or, aucun carré parfait ne se termine par 3.

En effet :
- si un nombre se termine par 0, son carré se termine par 0 ;
- si un nombre se termine par 1, son carré se termine par 1 ;
- si un nombre se termine par 2, son carré se termine par 4 ;
- si un nombre se termine par 3, son carré se termine par 9 ;
- si un nombre se termine par 4, son carré se termine par 6 ;
- si un nombre se termine par 5, son carré se termine par 5 ;
- si un nombre se termine par 6, son carré se termine par 6 ;
- si un nombre se termine par 7, son carré se termine par 9 ;
- si un nombre se termine par 8, son carré se termine par 4 ;
- si un nombre se termine par 9, son carré se termine par 1.

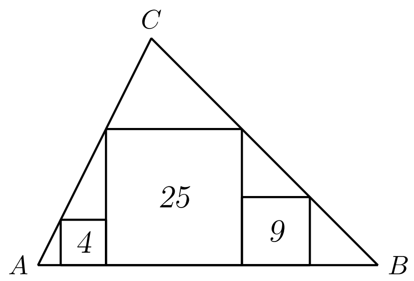
Ainsi, il n'existe aucune valeur de $N \geqslant 5$ telle que $1!+2!+3!+\ldots+N!$ soit un carré parfait.

Il reste donc à vérifier les valeurs de $N < 5$.
- si $N = 1$, $1! = 1$ est un carré parfait ;
- si $N = 2$, $1!+2! = 3$ n'est pas un carré parfait ;
- si $N = 3$, $1!+2!+3! = 9$ est un carré parfait ;
- si $N = 4$, $1!+2!+3!+4! = 33$ n'est pas un carré parfait.

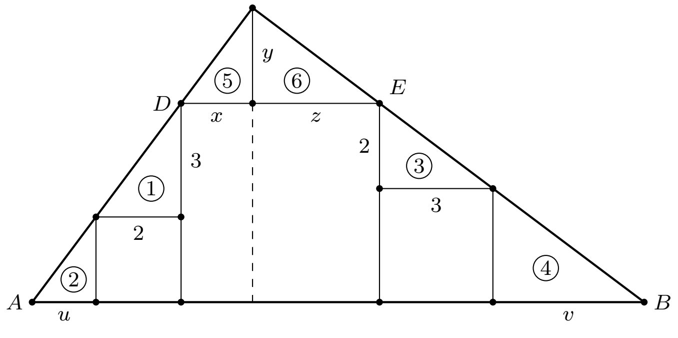
Conclusion : $1!+2!+3!+4!+\cdots+N!$ est un carré parfait uniquement si $N = 1$ ou $N = 3$.

Question 4 – 2023

Quelle est l'aire du triangle ABC si les aires de trois carrés inscrits sont respectivement 4, 25, 9 comme dessiné sur la figure imprécise ci-dessous ?



Solution inspirée de celle de Cyrille Boussart



Les triangles ① et ② sont semblables car leurs côtés sont parallèles deux à deux et il en est de même pour les triangles ③ et ④. Nous en déduisons $\frac{3}{2} = \frac{2}{u}$ ou $u = \frac{4}{3}$ et $\frac{2}{3} = \frac{3}{v}$ ou $v = \frac{9}{2}$. Par conséquent, $|AB| = \frac{4}{3} + 2 + 5 + 3 + \frac{9}{2} = \frac{95}{6}$.

Dans le triangle CDE, traçons la hauteur issue de C, ce qui forme les triangles ⑤ et ⑥, qui sont respectivement semblables aux triangles ①, ② et ③, ④. Nous pouvons écrire $\begin{cases} \frac{3}{y} = \frac{2}{x} \\ \frac{2}{y} = \frac{3}{z} \end{cases}$ ou

$y = \frac{3x}{2} = \frac{2z}{3}$. Et comme $x + z = 5$, $y = \frac{3x}{2} = \frac{2z}{3}$ s'écrit $\frac{15-3z}{2} = \frac{2z}{3}$ dont nous tirons $z = \frac{45}{13}$ et $y = \frac{2z}{3} = \frac{30}{13}$. La hauteur du triangle ABC est donc $|AB| = y + 5 = \frac{95}{13}$, et son aire est

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{95}{6} \cdot \frac{95}{13} = \frac{9025}{156}.$$

Question 1 – 2024

Trouver tous les triplets $(a; b; c)$ de nombres entiers tels que $ab + c = 2023$ et $a + bc = 2024$.

Solution inspirée de celle de Konstantinos Katsikas

En soustrayant $a + bc = 2024$ de $ab + c = 2023$, nous obtenons

$$\begin{aligned} ab + c - bc - a = -1 &\iff (b-1)a - (b-1)c = -1 \\ &\iff a - c = \frac{-1}{b-1}. \end{aligned}$$

L'expression $\frac{-1}{b-1}$ doit être entière puisqu'elle est la différence de deux entiers.
Donc $b - 1 = \pm 1$ et $b = 0$ ou $b = 2$.

- Si $b = 2$, $a - c = -1$ ou $a = c - 1$. En substituant dans $ab + c = 2023$, il vient $2(c-1) + c = 2023$ ou $c = 675$. De là, $a = c - 1 = 674$.
- Si $b = 0$, les conditions de l'énoncé s'écrivent directement $c = 2023$ et $a = 2024$.

En conclusion, il existe deux triplets (a, b, c) tels que $\begin{cases} ab + c = 2023 \\ a + bc = 2024. \end{cases}$

Ces triplets sont $(674; 2; 675)$ et $(2024; 0; 2023)$.

Question 2 – 2024

Une cuillère de sirop est versée d'une grande bouteille de sirop dans un petit verre d'eau, sans débordement. L'eau et le sirop sont alors soigneusement mélangés, puis une cuillère de même capacité est prélevée du verre et son contenu est entièrement versé dans la bouteille. Ainsi, la bouteille et le verre contiennent chacun une part de liquide « étranger », c'est-à-dire de l'eau dans le sirop de la bouteille et du sirop dans l'eau du verre.

a) Lequel de la bouteille ou du verre contient la plus grande quantité de liquide « étranger » ?

b) Lequel de la bouteille ou du verre contient la plus grande proportion de liquide « étranger » ?

Solution de Konstantinos Katsikas

a) Soient c le volume de sirop dans une cuillère, v le volume d'eau dans un petit verre, et b le volume de sirop dans une grande bouteille. Comme une cuillère est plus petite qu'un verre et un verre est plus petit qu'une bouteille, on a $c < v < b$.

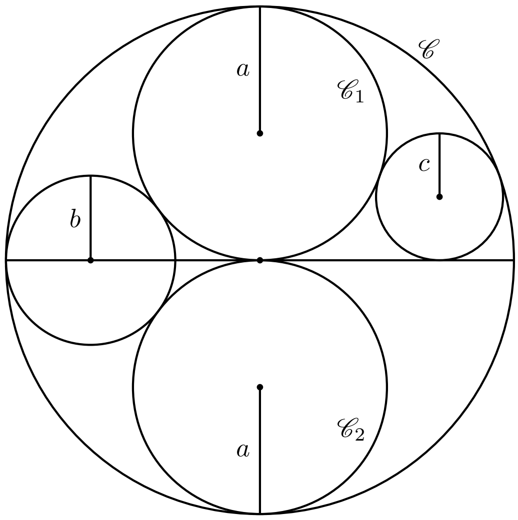
   La quantité de sirop versée dans le verre est c, et la quantité de sirop qu'on prélève du verre (après avoir bien mélangé) est $\frac{c^2}{v+c}$. La quantité de sirop restant dans le verre est $c - \frac{c^2}{v+c} = \frac{vc}{v+c}$, et comme une cuillère de liquide a été ajoutée et prélevée de chaque côté, le volume total reste partout le même, ce qui veut dire que la même quantité d'eau $\frac{vc}{v+c}$ a été prélevée du verre et versée dans la grande bouteille.

   Conclusion : La bouteille et le verre contiennent la même quantité de liquide étranger.

b) Comme la bouteille et le verre contiennent la même quantité de liquide étranger, le récipient avec un volume plus faible a une proportion plus élevée de liquide étranger. Or, nous savons que $v < b$. Donc le verre contient la plus grande proportion de liquide étranger.

Question 3 – 2024

Dans un grand cercle $\mathscr{C}$ de rayon 12, on inscrit deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de rayon a, tangents entre eux au centre de $\mathscr{C}$ et tangents au grand cercle. On inscrit ensuite un cercle de rayon b, tangent aux trois cercles déjà tracés et un cercle de rayon c, tangent à $\mathscr{C}$, à $\mathscr{C}_1$ et au diamètre de $\mathscr{C}$ tangent à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.



a) Que vaut a ?

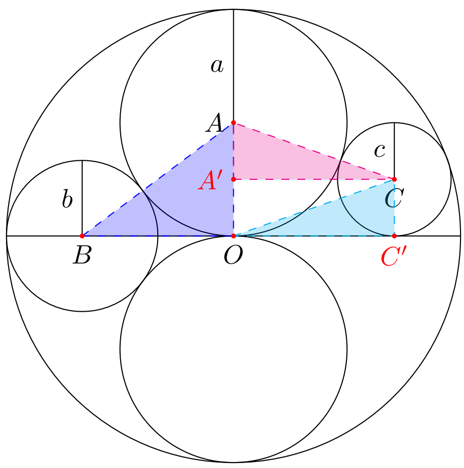
b) Que vaut b ?

c) Que vaut c ?

Solution inspirée de celles de Shah Kiah et Martin Derouaux

Appelons A , B et C les centres des cercles de rayons a, b et c et nommons O le centre du grand cercle. Comme les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents entre eux et à $\mathscr{C}$, on a

$$2a = 12 \iff a = 6.$$



Nous allons utiliser trois propriétés bien connues, chacune étant une conséquence de celle qui précède.

- la tangente en un point d'un cercle est perpendiculaire au rayon qui aboutit en ce point (1),
- si deux cercles sont tangents en un point, ce point appartient au segment joignant les centres des deux cercles (2) ;
- la distance séparant les centres de deux cercles tangents extérieurement est égale à la somme des rayons (3) ; la distance séparant les centres de deux cercles tangents intérieurement est égale à la valeur absolue de la différence des deux rayons (4).

Considérons le triangle OAB, rectangle en O selon (1).
Comme on a en plus $|AB| = a + b$ car (3) et $|OB| = 12 - b$ car (4), grâce au théorème de Pythagore,

$$(12 - b)^2 = (b + 6)^2 - 6^2 \iff b = 4.$$

Traçons le rayon du grand cercle passant par C et nommons C' le point de contact du cercle de centre C avec le diamètre de $\mathscr{C}$. C' est aussi la projection orthogonale de C sur le diamètre du grand cercle. Dans le triangle OCC', rectangle en C' car (1), on a $|CC'| = c$ et $|OC| = 12 - c$ car (4). Donc

$$|OC'|^2 = (12 - c)^2 - c^2 = 144 - 24c.$$

Par C, traçons la parallèle au diamètre et désignons par A' le point d'intersection de cette parallèle avec $[OA]$.
Dans le triangle CAA', rectangle en A', on a $|AC| = a + c = 6 + c$ car (3) et
$|AA'| = |AO| - |A'O| = |AO| - |CC'| = a - c = 6 - c$.
Grâce au théorème de Pythagore, on obtient donc

$$|CA'|^2 = (a + c)^2 - (a - c)^2 = 4ac = 24c.$$

Comme $|CA'| = |OC'|$, on a

$$144 - 24c = 24c \Longleftrightarrow c = 3.$$

Question 4 – 2024

Pour tout nombre naturel n, $P(n)$ représente l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui est un diviseur de n. Par exemple, $P(96) = 5$ car $2^5 = 32$ est un diviseur de 96 et $2^6 = 64$ ne l'est pas.

a) Que vaut $P(336)$?
b) Si $P(a) = m$ et si $P(b) = n$, que vaut $P(a \cdot b)$?
c) Pour un nombre naturel n non nul, $n!$ est une abréviation pour $n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$. Que vaut $P(10!)$?
d) Que vaut $P(100!)$?

Solution de Kinji Yoshida

a) Comme $336 = 2^4 \cdot 21$, on trouve $P(336) = 4$.
b) Vu l'énoncé on peut écrire $a = 2^m \cdot p$ et $b = 2^n \cdot q$, avec p, q étant des entiers impairs. On trouve alors $a \cdot b = 2^{m+n} \cdot pq$, où pq est encore impair. On conclut que $P(a \cdot b) = m + n$.
c) Le nombre de fois que 2 apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de 10! peut être donné par la formule de Legendre

$$\left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{16} \right\rfloor + \cdots = 5 + 2 + 1 = 8.$$

Donc $P(10!) = 8$.
d) De manière similaire,

$$\begin{aligned} P(100!) &= \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{32} \right\rfloor \\ &\quad + \left\lfloor \frac{100}{64} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{128} \right\rfloor + \cdots \\ &= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 \\ &= 97. \end{aligned}$$