Questions de finale de l'OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE

MAXI FINALES 2022–2024

Une organisation de la

1. Énoncés des questions

Question 1 – 2022

Par définition, la factorielle $a!$ du nombre naturel a non nul vaut $a! = a \times (a-1) \times \cdots \times 1$.

a) Existe-t-il un nombre entier a, compris entre 2 et 100, tel que $a!$ est un carré parfait ? Si oui, lequel ?

b) Le nombre $P = 1! \times 2! \times 3! \times \cdots \times 100!$ est-il un carré parfait ?

c) Existe-t-il un nombre entier a, compris entre 1 et 100, tel que $\dfrac{P}{a!}$ est un carré parfait ?

i. Si oui, quelles sont toutes les valeurs possibles de a ?

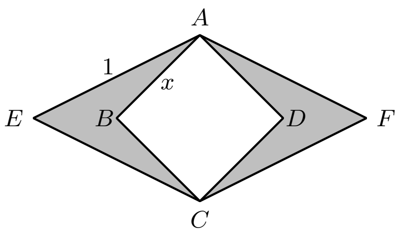
ii. Sinon, existe-t-il deux nombres entiers a et b distincts, compris entre 1 et 100, tels que $\dfrac{P}{a! \times b!}$ est un carré parfait ?

Question 2 – 2022

Extérieurement à un carré $ABCD$ de côté variable x, avec $0 < x < 1$, est construit le losange $AECF$ de côté 1, comme sur la figure ci-contre.

a) Quelle est l'aire de la partie de plan ombrée (intérieure au losange $AECF$ et extérieure au carré $ABCD$), en fonction de x ?

b) Pour quelle valeur de x l'aire de la partie de plan ombrée est-elle maximale ?

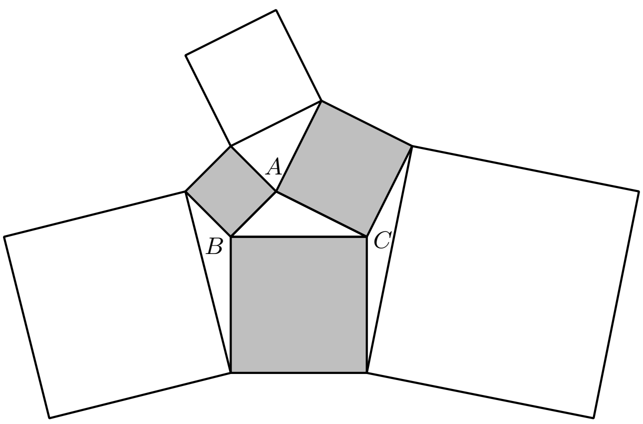


Question 3 – 2022

Dans la figure ci-dessous, trois carrés ombrés sont construits sur les côtés d'un triangle ABC, extérieurement au triangle. Trois carrés non ombrés sont construits à partir de sommets des carrés ombrés, comme indiqué sur la figure.

a) Si ABC est un triangle rectangle, que vaut le rapport de la somme des aires des carrés non ombrés à la somme des aires des carrés ombrés ?

b) Et si ABC est un triangle quelconque ?



Question 4 – 2022

Les 590 élèves d'une école seront répartis en 25 classes comptant chacune de 18 à 28 élèves.

a) *Existe-t-il une répartition des élèves pour laquelle 22 classes ont le même nombre d'élèves ?*

b) *Quel est le plus grand nombre naturel n pour lequel au moins une répartition des élèves fait que n classes ont le même nombre d'élèves ?*

c) *Existe-t-il une répartition des élèves pour laquelle il* n'y a pas *trois classes avec le même nombre d'élèves ?*

d) *Quel est le plus grand nombre naturel n pour lequel toute répartition des élèves fait qu'au moins n classes ont le même nombre d'élèves ?*

Question 1 – 2023

La notation $\overline{a_k \ldots a_2 a_1 a_0}_b$ représente le nombre dont les chiffres en base b sont a_k, …, a_2, a_1 et a_0. Par exemple,

$$\overline{235}_{10} = 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5 = 235 \text{ et } \overline{235}_7 = 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 = 124.$$

Trouver tous les triplets (x, y, z), avec x, y et z dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $x \neq 0$, pour lesquels $\overline{xyz}_{10} = 2 \times \overline{xyz}_7$.

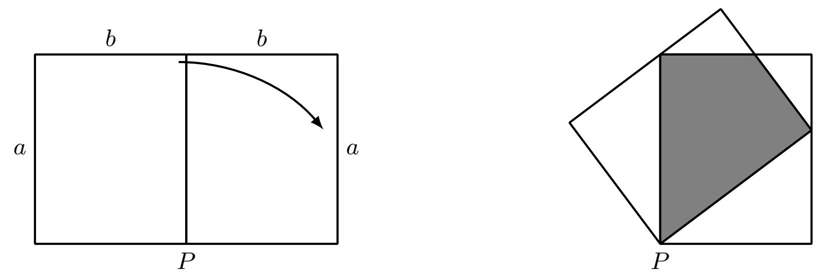
Question 2 – 2023

Je possède deux cartons rectangulaires identiques de longueur a et de largeur b ($a > b$). Je les place côte à côte, comme sur la figure de gauche ci-dessous. Je fais ensuite tourner le carton de gauche autour de son coin inférieur droit P, jusqu'à ce que son coin supérieur droit atteigne le bord droit du carton de droite, comme sur la figure de droite.

a) *Démontrer que le coin supérieur gauche du carton de droite touche alors lui aussi le bord gauche du carton de gauche.*

b) *Quelle est, en fonction de a et b, l'aire de la surface ombrée, où les deux cartons se superposent ?*

c) *Si la longueur a et la largeur b des cartons, ainsi que l'aire de la surface ombrée, sont des nombres entiers, quelle est la longueur minimale de ces cartons ?*



Question 3 – 2023

Trouver toutes les solutions du système

$$\begin{cases} x + y + 1/z = 3 \\ x + 1/y + z = 3 \\ 1/x + y + z = 3, \end{cases}$$

d'inconnue (x, y, z) avec x, y et z des nombres réels.

Question 4 – 2023

Trois sphères sont tangentes deux à deux et tangentes à un même plan, avec lequel les points de contact sont les sommets d'un triangle de côtés 3, 6 et 4. Quels sont les rayons des trois sphères ?

Question 1 – 2024

Johan part au lever du soleil du point X et, marchant à vitesse constante, arrive à 16 heures au point Y. Pirlouit part au lever du soleil de Y et, marchant à vitesse constante sur le même chemin que Johan mais en sens opposé, arrive à 21 heures à X. Sachant que Johan et Pirlouit se sont croisés à midi, à quelle heure était le lever du soleil ce jour-là ?

Question 2 – 2024

La différence entre le cube de la somme de nombres entiers et la somme des cubes de ces nombres est-elle toujours divisible par 3 :

- *a) Lorsqu'il s'agit d'une somme de deux nombres ?*
- *b) Lorsqu'il s'agit d'une somme de trois nombres ?*
- *c) Lorsqu'il s'agit d'une somme de n nombres ?*

Question 3 – 2024

Les points B, C, D et E sont disposés dans cet ordre sur une droite. Le triangle ABE est rectangle en B et les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$ et $\widehat{DAE}$ sont égaux. Exprimer (le plus simplement possible !) la longueur $|DE|$ en fonction de $a = |BC|$ et $b = |CD|$.

Question 4 – 2024

Soit $S(n)$ la somme des chiffres du nombre naturel n. Tout nombre obtenu en supprimant un ou plusieurs chiffres situés (le plus) à droite dans n est appelé une souche *de n. Par exemple, les souches de 2345 sont 234, 23 et 2. Soit $T(n)$ la somme de toutes les souches de n. Montrer que le quotient*

$$\frac{n - S(n)}{T(n)}$$

est un entier indépendant de n quel que soit le naturel $n \geqslant 10$.

2. Questions avec réponses

Question 1 – 2022

Par définition, la factorielle $a!$ du nombre naturel a non nul vaut $a! = a \times (a-1) \times \cdots \times 1$.

a) Existe-t-il un nombre entier a, compris entre 2 et 100, tel que $a!$ est un carré parfait ? Si oui, lequel ?

b) Le nombre $P = 1! \times 2! \times 3! \times \cdots \times 100!$ est-il un carré parfait ?

c) Existe-t-il un nombre entier a, compris entre 1 et 100, tel que $\dfrac{P}{a!}$ est un carré parfait ?

i. Si oui, quelles sont toutes les valeurs possibles de a ?

ii. Sinon, existe-t-il deux nombres entiers a et b distincts, compris entre 1 et 100, tels que $\dfrac{P}{a! \times b!}$ est un carré parfait ?

Solution de Benoît Van Schaftingen

a) Aucun nombre entier $a!$, avec a compris entre 2 et 100 ne peut être un carré parfait. En effet le plus grand nombre premier plus petit ou égal à a n'apparaîtra qu'une seule fois comme facteur dans l'écriture de $a!$.

b) On observe que :

$1! \times 2! = 1! \times 2$

$1! \times 2! \times 3! = 1! \times 2 \times 3!$

$1! \times 2! \times 3! \times 4! = 1! \times 2 \times (3!)^2 \times 4$

$1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! = 1! \times 2 \times (3!)^2 \times 4 \times 5!$

$1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times 6! = 1! \times 2 \times (3!)^2 \times 4 \times (5!)^2 \times 6$

$\vdots$

$P = (1! \times 3! \times \cdots \times 99!)^2 \times (2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100)$

Les nombres impairs interviennent chaque fois un nombre pair de fois ; il reste à examiner un produit composé des nombres pairs.

Or $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100 = 2^{50} \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 50) = \left(2^{25}\right)^2 \times 50!$

Comme nous savons par a) que $50!$ n'est pas un carré parfait, P n'est pas un carré parfait.

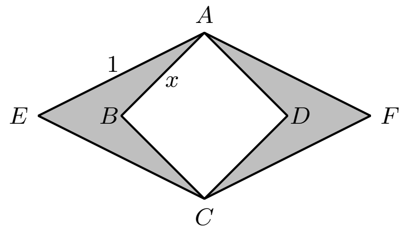
c) L'écriture précédente de P montre que $\frac{P}{50!}$ est un carré parfait et que 50 est la seule valeur possible pour que $\frac{P}{a!}$ soit un carré parfait. Il n'existe donc aucun nombre entier a et b tel que $\frac{P}{a! \times b!}$ soit un carré parfait.

Question 2 – 2022

Extérieurement à un carré $ABCD$ de côté variable x, avec $0 < x < 1$, est construit le losange $AECF$ de côté 1, comme sur la figure ci-contre.

a) Quelle est l'aire de la partie de plan ombrée (intérieure au losange $AECF$ et extérieure au carré $ABCD$), en fonction de x ?

b) Pour quelle valeur de x l'aire de la partie de plan ombrée est-elle maximale ?



Solution d'Olivier d'Angelo

a) L'aire ombrée $\mathscr{A}(x)$ est égale à $\frac{1}{2}|AC| \cdot |EF| - |AB|^2$. Puisque le côté du carré $ABCD$ est $|AB| = x$, la diagonale $|AC| = x\sqrt{2}$. Si I est le centre du carré, le triangle AIE est rectangle et le théorème de PYTHAGORE livre $\frac{1}{2}|EF| = |EI| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}$. Et donc on a

$$\mathscr{A}(x) = x\sqrt{2-x^2} - x^2, \text{ pour } 0 < x < 1.$$

b) Pour rechercher le maximum, effectuons le changement de variable : $x = \sqrt{2}\cos\theta$, avec $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\theta) &= \sqrt{2}\cos\theta\sqrt{2(1-\cos^2\theta)} - 2\cos^2\theta \\ &= 2\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\theta\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}'(\theta) &= -2\sqrt{2}\sin\theta\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

ce qui conduit au tableau de variation :

θ	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
$\mathscr{A}'(\theta)$	|	$+$	0	$-$	|
$\mathscr{A}(\theta)$	|	$\nearrow$		$\searrow$	|

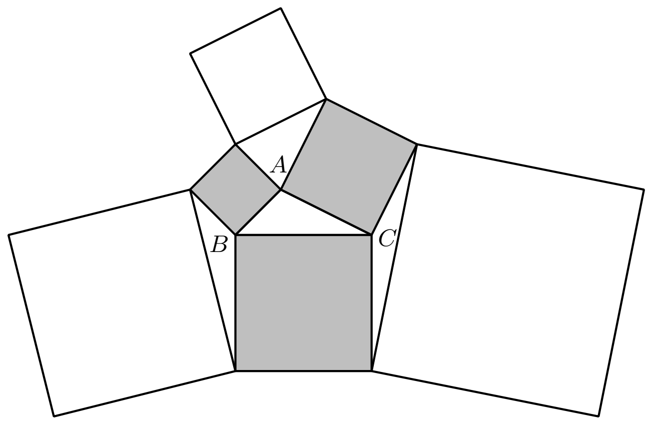
Le maximum de la fonction $\mathscr{A}(\theta)$ est atteint pour $\theta = \frac{3\pi}{8}$ ou encore $x = \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$, ce qui après calcul et simplification donne $x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Question 3 – 2022

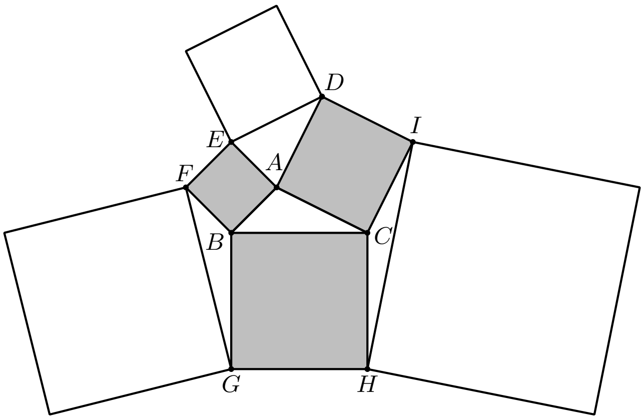
Dans la figure ci-dessous, trois carrés ombrés sont construits sur les côtés d'un triangle ABC, extérieurement au triangle. Trois carrés non *ombrés sont construits à partir de sommets des carrés ombrés, comme indiqué sur la figure.*

a) *Si ABC est un triangle rectangle, que vaut le rapport de la somme des aires des carrés* non *ombrés à la somme des aires des carrés ombrés ?*

b) *Et si ABC est un triangle quelconque ?*



Solution de Pierre Roth



Notons $a = |BC|$, $b = |AC|$ et $c = |AB|$. D'après le théorème d'Al Kashi dans les triangles AED, CHI et BGF, on a :

$$\begin{aligned}
|ED|^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi - \widehat{A}) \\
|HI|^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \widehat{C}) \\
|GF|^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\pi - \widehat{B})
\end{aligned}$$

Le rapport cherché vaut

$$\begin{aligned}
\frac{|ED|^2 + |HI|^2 + |GF|^2}{a^2 + b^2 + c^2} &= \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) + 2ab\cos\widehat{C} + 2bc\cos\widehat{A} + 2ac\cos\widehat{B}}{a^2 + b^2 + c^2} \\
&= 2 + \frac{2ab\cos\widehat{C} + 2bc\cos\widehat{A} + 2ac\cos\widehat{B}}{a^2 + b^2 + c^2}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

En appliquant encore Al Kashi au triangle ABC, on obtient

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \iff 2ab\cos\widehat{C} = a^2 + b^2 - c^2$$

et de même

$$2ac\cos\widehat{B} = a^2 + c^2 - b^2 \quad \text{et} \quad 2bc\cos\widehat{A} = b^2 + c^2 - a^2.$$

L'expression (**??**) devient alors

$$2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2 + b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 3.$$

Ce rapport est valable dans tout triangle ABC, donc également dans un triangle rectangle.

Question 4 – 2022

Les 590 élèves d'une école seront répartis en 25 classes comptant chacune de 18 à 28 élèves.

a) *Existe-t-il une répartition des élèves pour laquelle 22 classes ont le même nombre d'élèves ?*

b) *Quel est le plus grand nombre naturel n pour lequel au moins une répartition des élèves fait que n classes ont le même nombre d'élèves ?*

c) *Existe-t-il une répartition des élèves pour laquelle il* n'y a pas *trois classes avec le même nombre d'élèves ?*

d) *Quel est le plus grand nombre naturel n pour lequel toute répartition des élèves fait qu'au moins n classes ont le même nombre d'élèves ?*

Solution inspirée de celle de Rodolphe Caine

a) Oui. En effet, on a que $590 = 22 \cdot 23 + 3 \cdot 28$. Une répartition avec 22 classes ayant le même nombre d'élèves pourrait donc être 22 classes avec 23 élèves et 3 classes avec 28 élèves.

b) D'après la réponse à la question a), il nous reste seulement à étudier les cas $n = 23$, 24 et 25.

- Si $n = 25$, on remarque simplement que 25 ne divise pas 590 ($590 = 25 \cdot 23 + 15$) donc $n = 25$ n'est pas solution car on ne peut remplir 25 classes avec autant d'élèves chacune.

- Si $n = 24$, on pose q le nombre d'élèves dans chacune des 24 classes. Comme la 25e classe a entre 18 et 28 élèves, on a :

  $$24q + 18 \leqslant 590 \leqslant 24q + 28 \quad \Longleftrightarrow \quad 562 \leqslant 24q \leqslant 572.$$

  Or $24 \cdot 23 = 552$ et $24 \cdot 24 = 576$, donc il n'y a pas de multiple de 24 entre 562 et 572, ce qui conclut que $n = 24$ n'est pas une solution.
- Le cas $n = 23$ fonctionne car $590 = 23 \cdot 24 + 2 \cdot 19$. Donc une répartition avec 23 classes comptant 24 élèves chacune et 2 classes avec 19 élèves chacune est possible.

Donc $n = 23$ est le plus grand entier naturel tel qu'une répartition existe avec n classes ayant autant d'élèves.

c) La réponse est non. Les classes peuvent avoir entre 18 et 28 élèves, ce qui donne 11 valeurs possibles pour le nombre d'élèves d'une classe. Il y a 25 classes et $25 > 2 \cdot 11$, donc d'après le principe des tiroirs, il y a au moins 3 classes ayant le même nombre d'élèves et ce peu importe la répartition des 590 élèves.

d) À la question c), nous avons montré que $n = 3$ fonctionne. Il reste à montrer que c'est la plus grande solution possible. Trouvons donc une répartition avec au plus 3 classes ayant autant d'élèves chacune. En voici une :

$$2 \cdot 18 + 20 + 3 \cdot 21 + 3 \cdot 22 + 3 \cdot 23 + 3 \cdot 24 + 3 \cdot 25 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 27 + 2 \cdot 28 = 590$$

La réponse est donc que le plus grand entier n tel que peu importe la répartition on ait au moins n classes avec autant d'élèves est $n = 3$.

Question 1 – 2023

La notation $\overline{a_k \ldots a_2 a_1 a_0}_{\,b}$ représente le nombre dont les chiffres en base b sont a_k, …, a_2, a_1 et a_0. Par exemple,

$$\overline{235}_{10} = 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5 = 235 \text{ et } \overline{235}_7 = 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 = 124.$$

Trouver tous les triplets (x, y, z), avec x, y et z dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $x \neq 0$, pour lesquels $\overline{xyz}_{10} = 2 \times \overline{xyz}_7$.

Solution de Samuel Mertens

On a,

$$\begin{aligned}
(\overline{xyz})_{10} = 2 \cdot (\overline{xyz})_7 \quad &\Longleftrightarrow \quad 100x + 10y + z = 2 \cdot (49x + 7y + z) \\
&\Longleftrightarrow \quad 98x + 14y + 2z - (100x + 10y + z) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4y + z = 2x
\end{aligned}$$

avec $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $y, z \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

x	équation	solutions $(y; z)$
1	$4y + z = 2$	$(0; 2)$
2	$4y + z = 4$	$(0; 4), (1; 0)$
3	$4y + z = 6$	$(0; 6), (1; 2)$
4	$4y + z = 8$	$(1; 4), (2; 0)$
5	$4y + z = 10$	$(1; 6), (2; 2)$
6	$4y + z = 12$	$(2; 4), (3; 0)$

Tous les triplets $(x; y; z)$ sont : $(1; 0; 2)$, $(2; 0; 4)$, $(2; 1; 0)$, $(3; 0; 6)$, $(3; 1; 2)$, $(4; 1; 4)$, $(4; 2; 0)$, $(5; 1; 6)$, $(5; 2; 2)$, $(6; 2; 4)$, $(6; 3; 0)$. Il y a donc 11 solutions.

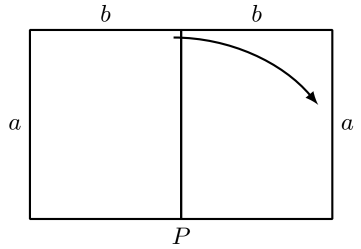
Question 2 – 2023

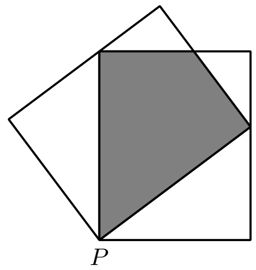
Je possède deux cartons rectangulaires identiques de longueur a et de largeur b ($a > b$). Je les place côte à côte, comme sur la figure de gauche ci-dessous. Je fais ensuite tourner le carton de gauche autour de son coin inférieur droit P, jusqu'à ce que son coin supérieur droit atteigne le bord droit du carton de droite, comme sur la figure de droite.

a) Démontrer que le coin supérieur gauche du carton de droite touche alors lui aussi le bord gauche du carton de gauche.

b) Quelle est, en fonction de a et b, l'aire de la surface ombrée, où les deux cartons se superposent ?

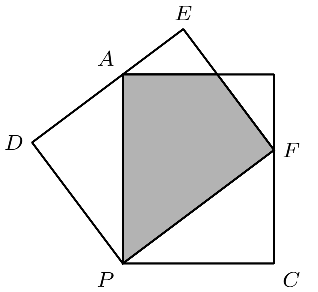
c) Si la longueur a et la largeur b des cartons, ainsi que l'aire de la surface ombrée, sont des nombres entiers, quelle est la longueur minimale de ces cartons ?





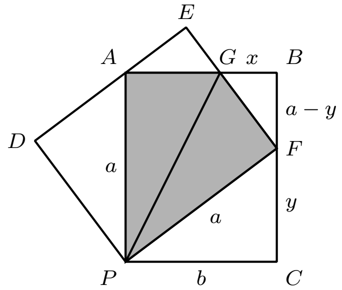
Solution de Louise Bernier, Augustin Wezel et Gabriela Tatu-Caravan

a) On ajoute au schéma les points A, B, C, D, E et F.



$|\widehat{DPA}| = 90° - |\widehat{APF}|$ et $|\widehat{FPC}| = 90° - |\widehat{APF}|$, donc $|\widehat{DPA}| = |\widehat{FPC}|$.
De plus, $|AP| = |PF|(= a)$ et $|DP| = |PC|(= b)$, donc les triangles DAP et PFC sont isométriques.
Puisque $|\widehat{PCF}| = 90°$ dans le triangle PFC, $|\widehat{ADP}| = 90°$ dans le triangle ADF.
Or $|\widehat{EDP}| = 90°$ dans le rectangle $DEFP$, ainsi $A \in DE$.

b) On complète encore le schéma.



$|\widehat{PFC}| = 180° - 90° - |\widehat{GFB}| = 90° - |\widehat{GFB}|$ et $|\widehat{BGF}| = 90° - |\widehat{GFB}|$, donc $|\widehat{PFC}| = |\widehat{BGF}|$ et les triangles PFC et GFB sont semblables.
Posons $|GB| = x$, $|FC| = y$, $|FB| = a - y$ et $|AG| = b - x$.
De $\frac{y}{b} = \frac{x}{a-y}$, on tire $x = \frac{y}{b}(a - y)$.
Ensuite, $b - x = b - \frac{y}{b}(a - y) = \frac{b^2-ay+y^2}{b} = \frac{b^2-ay+a^2-b^2}{b} = \frac{a^2-ay}{b}$.
Les triangles AGP et FGP étant isométriques (triangles rectangles et $|AP| = |PF| = a$), l'aire ombrée est le double de l'aire du triangle AGP, soit $a(b-x) = \frac{a}{b}(a^2 - ay) = \frac{a}{b}\left(a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}\right) = \frac{a^2}{b}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$.

c) On cherche a et b nombres entiers pour que $\sqrt{a^2 - b^2}$ soit aussi un nombre entier. On teste les triplets pythagoriciens les plus simples et on vérifie que l'aire hachurée $A = \frac{a^2}{b}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$ est encore un nombre entier.

a	b	c	A	?
5	3	4	$\frac{25}{3}$	non
5	4	3	$\frac{25}{2}$	non
10	6	8	$\frac{100}{3}$	non
10	8	6	50	oui

La longueur minimale de ces cartons est $a = 10$.

Question 3 – 2023

Trouver toutes les solutions du système

$$\begin{cases} x+y+1/z=3 \\ x+1/y+z=3 \\ 1/x+y+z=3, \end{cases}$$

d'inconnue (x,y,z) avec x, y et z des nombres réels.

Solution de Joseph Deraemaeker

$$\begin{cases} x+y+\frac{1}{z}=3 & (1) \\ x+\frac{1}{y}+z=3 & (2) \\ \frac{1}{x}+y+z=3 & (3) \end{cases}$$

De (1) et (2) on a : $y+\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+z \Leftrightarrow y-\frac{1}{y}=z-\frac{1}{z}$
De (2) et (3) on a : $x+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+y \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y}$
De (1) et (3) on a : $x+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+z \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=z-\frac{1}{z}$

La fonction $f(x)=x-\frac{1}{x}=x+\left(-\frac{1}{x}\right)$ est une somme de fonctions strictement croissantes sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, et est donc strictement croissante sur chacun de ces intervalles.
Sur les trois nombres non nuls x, y, z, il en existe au moins deux de même signe (principe des tiroirs), disons x et y sans perte de généralité. Donc :

$$x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y} \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y.$$

Cas 1 : z est de même signe que x et y.

Alors $f(x)=f(y)=f(z)$ donne $x=y=z$ et notre système d'équations devient :

$$2x+\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x\in\{\frac{1}{2};1\}$$

ce qui donne les solutions $(1;1;1)$ et $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, qui fonctionnent bien après vérification.

Cas 2 : z est de signe contraire à celui de x et y.

Il suffit alors de remarquer que

$$f\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}+x=f(x) \quad \text{donc} \quad f(x)=f(y)=f(z) \Leftrightarrow x=y=-\frac{1}{z}.$$

(Il n'y a qu'une seule possibilité pour z puisque f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$.) Le système d'équations devient alors $x=3$, ce qui nous donne la dernière solution $\left(3;3;-\frac{1}{3}\right)$ et ses permutations, qui fonctionnent toutes après vérification. Au final,

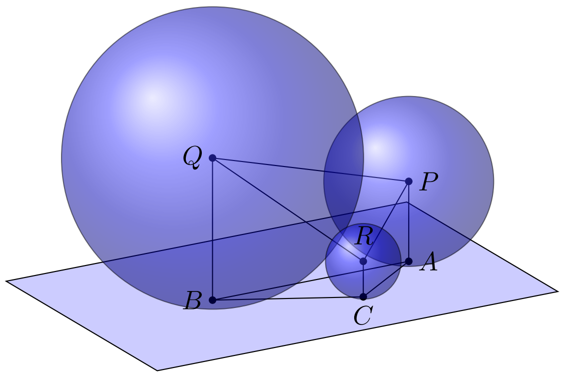
$$S=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);(1;1;1);\left(3;3;-\frac{1}{3}\right);\left(3;-\frac{1}{3};3\right);\left(-\frac{1}{3};3;3\right)\right\}$$

Question 4 – 2023

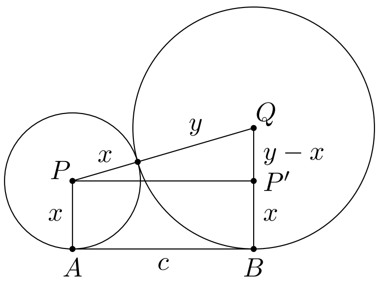
Trois sphères sont tangentes deux à deux et tangentes à un même plan, avec lequel les points de contact sont les sommets d'un triangle de côtés 3, 6 et 4. Quels sont les rayons des trois sphères ?

Solution inspirée de celles de beaucoup de participants

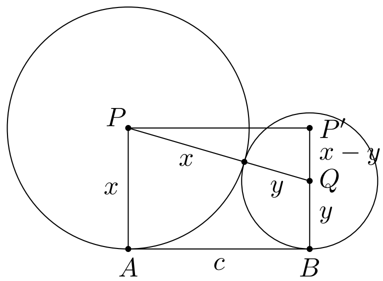
Notons P, Q et R les centres des trois sphères et A, B, C les points de contact, qui sont les projections orthogonales des centres sur le plan, puisque le plan tangent à une sphère est perpendiculaire au rayon joignant le centre au point de contact. Donc $|AB|=c=6$, $|BC|=a=3$ et $|CA|=b=4$. Notons x, y et z (respectivement) les rayons cherchés.



Les droites AP et BQ, toutes deux perpendiculaires au plan, sont parallèles entre elles, de sorte que $ABQP$ est un trapèze rectangle. Projetons orthogonalement P sur BQ, en P' : nous avons alors



ou



selon que x est inférieur ou supérieur à y, ce que nous ne savons pas encore. Mais dans les deux cas, nous disposons d'un triangle rectangle d'hypoténuse $x+y$ et dont les côtés de l'angle droit mesurent c et $|x-y|$. Le théorème de Pythagore nous assure donc que

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + c^2,$$

soit après réduction : $xy = c^2/4$. De la même manière, nous obtenons que $yz = a^2/4$ et $zx = b^2/4$.

Nous n'avons plus qu'à résoudre le système

$$\begin{cases} xy = c^2/4 \\ yz = a^2/4 \\ zx = b^2/4. \end{cases}$$

Le produit des trois équations donne $x^2y^2z^2 = a^2b^2c^2/64$, soit $xyz = abc/8$, puisque x, y et z, qui représentent des longueurs, sont positifs. En divisant cette égalité membre à membre par celles du système, nous obtenons les rayons :

$$\begin{cases} x = bc/(2a) = 4 \\ y = ca/(2b) = 9/4 \\ z = ab/(2c) = 1. \end{cases}$$

Question 1 – 2024

Johan part au lever du soleil du point X et, marchant à vitesse constante, arrive à 16 heures au point Y. Pirlouit part au lever du soleil de Y et, marchant à vitesse constante sur le même chemin que Johan mais en sens opposé, arrive à 21 heures à X. Sachant que Johan et Pirlouit se sont croisés à midi, à quelle heure était le lever du soleil ce jour-là ?

Solution de Thibault Guignard

On définit une échelle telle que le point X se trouve en 0 et le point Y en 1. Soient $j(t)$ et $p(t)$ les positions sur le chemin de Johan et Pirlouit respectivement, en fonction du temps t en heures. Soit x l'heure de lever du soleil : nous avons

$$\begin{cases} j(x) = 0 \quad \text{et} \quad j(16) = 1, \\ p(x) = 1 \quad \text{et} \quad p(21) = 0. \end{cases}$$

Comme Johan et Pirlouit marchent à vitesse constante, j et p sont des fonctions affines et nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} j(t) = \dfrac{1-0}{16-x}(t-x) = \dfrac{t-x}{16-x}, \\ p(t) = \dfrac{1-0}{x-21}(t-21) = \dfrac{t-21}{x-21}. \end{cases}$$

Puisque Johan et Pirlouit se croisent à midi, $j(12) = p(12)$, soit successivement :

$$\begin{aligned} \frac{12-x}{16-x} = \frac{12-21}{x-21} &\iff (12-x)(x-21) = -9(16-x) \\ &\iff -x^2 + 33x - 252 = 9x - 144 \\ &\iff x^2 - 24x + 108 = 0. \end{aligned}$$

Les racines de cette dernière équation sont $x = 6$ et $x = 18$. Cette deuxième solution impliquerait que Johan soit arrivé avant d'être parti, ce qui nous causerait sans doute des problèmes avec les physiciens. Le soleil s'est donc levé à 6 heures ce jour-là.

Question 2 – 2024

La différence entre le cube de la somme de nombres entiers et la somme des cubes de ces nombres est-elle toujours divisible par 3 :

a) Lorsqu'il s'agit d'une somme de deux nombres ?

b) Lorsqu'il s'agit d'une somme de trois nombres ?

c) Lorsqu'il s'agit d'une somme de n nombres ?

Solution inspirée de celle de Pierre Akin Dürrüoglu.

Montrons que la réponse à la question c) est positive. Cela implique que les réponses aux sous-questions a) et b) le sont également, puisqu'elles correspondent respectivement aux cas $n = 2$ et $n = 3$ de la sous-question c).

Pour cela, utilisons un résultat intermédiaire.

Lemme : *Pour tout entier x, l'entier $x^3 - x$ est divisible par* 3.

Preuve : on sait que $x^3 - x = x.(x^2-1) = x.(x-1).(x+1)$. Puisque les entiers $x-1$, x et $x+1$ sont consécutifs, l'un est divisible par 3. Le produit de ces trois entiers l'est donc également, donc $x^3 - x$ est divisible par 3.

Revenons à la sous-question c). Notons a_1, a_2, …, a_n les n entier et notons D la différence

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^3 - \left(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)$$

Réécrivons D d'une autre manière :

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 - \sum_{i=1}^{n} a_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 - \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^3 - a_i\right)$$

D'après le lemme appliqué aux entiers $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ puis respectivement $x = a_1$, a_2, …, a_n, cette écriture nous informe que D est somme de $n+1$ entiers divisibles par 3.

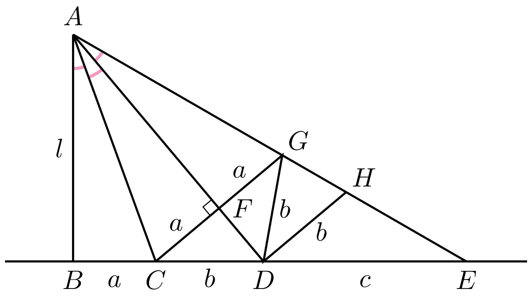
Ainsi D est lui-même divisible par 3, ce qui nous permet de répondre positivement à la sous-question c).

Question 3 – 2024

Les points B, C, D et E sont disposés dans cet ordre sur une droite. Le triangle ABE est rectangle en B et les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$ et $\widehat{DAE}$ sont égaux. Exprimer (le plus simplement possible !) la longueur $|DE|$ en fonction de $a = |BC|$ et $b = |CD|$.

Solution de Cahit Enes Bas

Le point C appartenant à la bissectrice AC de $\widehat{BAD}$, il est équidistant des côtés AB et AD de cet angle. Comme $CB \perp AB$, la distance de C à AB est $|CB| = a$. De l'autre côté, abaissons la perpendiculaire CF de C sur AD ; $|CF|$ est la distance de C à AD, et vaut donc a. Il en résulte aussi que les triangles ACB et ACF sont isométriques.



Prolongeons CF jusqu'à son point d'intersection G avec AE. Les triangles AFC et AFG sont isométriques (un côté commun entre des angles de même mesure) : donc $|FG| = |FC| = a$. Les triangles CFD et GFD sont isométriques (un angle droit entre deux paires de côtés de mêmes longueurs) : donc, $|GD| = |CD| = b$.

La parallèle à CG par D coupe AE en H. Dès lors, $\widehat{AHD} = \widehat{AGC} = \widehat{ACG} = \widehat{ACB}$, c'est-à-dire

$$\widehat{BCA} = \widehat{DHG}. \qquad (*)$$

En soustrayant de l'égalité

$$\widehat{BCA} + \widehat{ACF} + \widehat{FCD} = \widehat{AGC} + \widehat{CGD} + \widehat{DGH}$$

les deux suivantes :

$$\widehat{ACF} = \widehat{AGC}$$

et

$$\widehat{FCD} = \widehat{CGD},$$

nous obtenons

$$\widehat{BCA} = \widehat{DGH}.$$

Compte tenu de $(*)$, $\widehat{DGH} = \widehat{DHG}$: le triangle DGH est isocèle, donc $|DH| = |DG| = b$.

Il nous reste à observer que les triangles EHD et EGC sont semblables (leurs côtés homologues sont parallèles), de sorte que, si $c = |DE|$, successivement :

$$\frac{|HD|}{|GC|} = \frac{|ED|}{|EC|} \iff \frac{b}{2a} = \frac{c}{b+c} \iff b^2 + bc = 2ac \iff c(2a-b) = b^2 \iff c = \frac{b^2}{2a-b}.$$

Question 4 – 2024

Soit $S(n)$ la somme des chiffres du nombre naturel n. Tout nombre obtenu en supprimant un ou plusieurs chiffres situés (le plus) à droite dans n est appelé une souche de n. Par exemple, les souches de 2345 sont 234, 23 et 2. Soit $T(n)$ la somme de toutes les souches de n. Montrer que le quotient

$$\frac{n - S(n)}{T(n)}$$

est un entier indépendant de n quel que soit le naturel $n \geqslant 10$.

Solution de Samuel Nuyts

a) Initialisation : Si n est un nombre à deux chiffres, nous pouvons écrire $n = 10x + y$ avec $1 \leqslant x \leqslant 9$ et $0 \leqslant y \leqslant 9$ des nombres entiers.
On a : $S(n) = x + y$ et $T(n) = x$.
$\dfrac{n - S(n)}{T(n)} = \dfrac{10x + y - y - x}{x} = \dfrac{9x}{x} = 9.$

b) Hypothèse de récurrence : soit $\dfrac{n-S(n)}{T(n)} = 9$ pour un nombre n à k chiffres.

c) Étape inductive : tout nombre m ayant $(k+1)$ chiffres s'écrit $m = 10n + d$ où d est le chiffre le plus à droite dans l'écriture de m.

On a : $S(m) = S(n) + d$ et $T(m) = T(n) + n$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\frac{m - S(m)}{T(m)} = \frac{10n + d - S(n) - d}{T(n) + n} = \frac{\big(n - S(n)\big) + 9n}{T(n) + n} = \frac{9T(n) + 9n}{T(n) + n} = 9.$$