

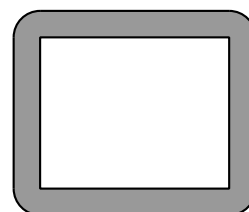


CINQUANTIÈME OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE MINI FINALE 2025

Mercredi 2 avril 2025

*Prière de répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Chaque réponse doit être soigneusement justifiée !*

1. (10 pts) La figure ci-contre représente le plan d'un château rectangulaire entouré de ses douves coloriées en gris. La base du château est un rectangle de 20 m sur 25 m et les douves occupent tous les points extérieurs au château mais à une distance d'au plus 4 m du château. Quelle est la superficie des douves ?



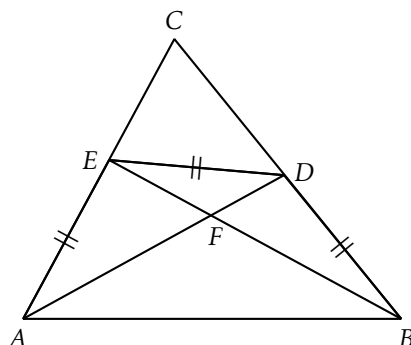
2. (10 pts) Dix nombres naturels distincts doivent satisfaire aux conditions suivantes :

- La moyenne des six plus petits nombres est égale à 5 ;
- La moyenne des six plus grands nombres est égale à 11.

a) Le plus petit de ces dix naturels peut-il être égal à 2 ?

b) Le plus petit de ces dix naturels peut-il être égal à 3 ?

3. (20 pts) L'amplitude de l'angle $\widehat{ACB}$ du triangle ACB est 70° . Le point D est sur $[BC]$ et le point E est sur $[AC]$ de sorte que $|BD| = |DE| = |AE|$. Le point F est à l'intersection de $[BE]$ et de $[AD]$. Quelle est l'amplitude de l'angle $\widehat{AFB}$?

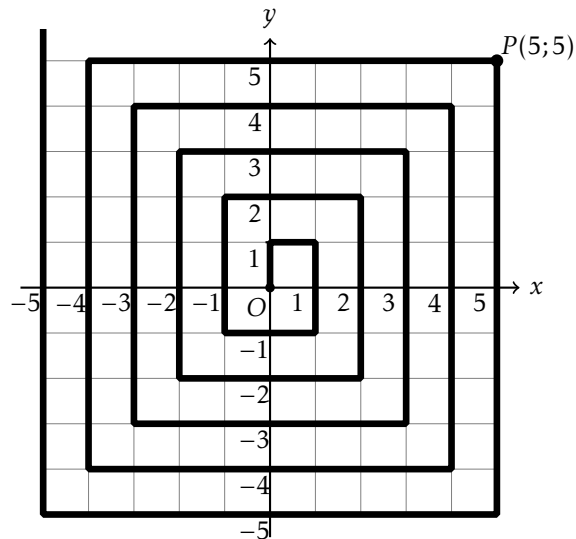


Suite au verso



4. (20 pts) Gaspard le cafard se balade sur une spirale à angles droits démarrant en l'origine $O(0;0)$ comme sur la figure ci-dessous.

- Quelle distance Gaspard a-t-il parcourue sur la spirale lorsqu'il se trouve en $P(5;5)$?
- Plus tard, Gaspard a parcouru 2025 unités de longueur sur la spirale depuis l'origine $O(0;0)$; quelles sont les coordonnées du point Q où il se trouve ?



5. (20 pts) Les figures a , b et c ci-dessous sont constituées de six ou cinq disques de même rayon et tangents entre eux. Les centres de deux disques tangents entre voisins sont sur une même droite horizontale ou sur une même droite verticale. Pour chacun des cas a , b et c , existe-t-il une droite, non horizontale et non verticale, qui partage la figure en deux parties de même aire ?

Si non, pourquoi ?

Si oui, justifier et donner la construction d'une telle droite.

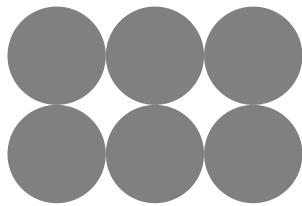


Figure a .

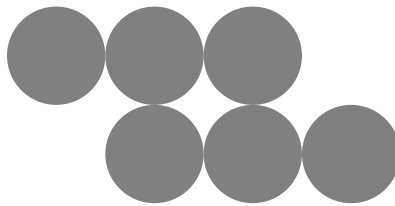


Figure b .

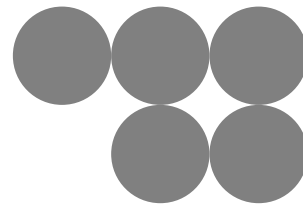
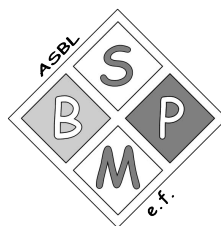


Figure c .

Une organisation de la



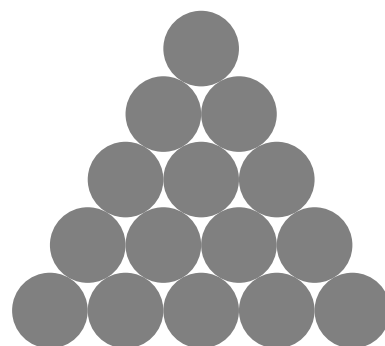


CINQUANTIÈME OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE MIDI FINALE 2025

Mercredi 2 avril 2025

*Prière de répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Chaque réponse doit être soigneusement justifiée !*

1. (20 pts) Considérons une disposition triangulaire serrée de disques de rayon 1 dans le plan, où deux quelconques des disques ont au plus un point commun. Notons n (avec $n > 1$) le nombre de disques sur un bord du triangle. La figure ci-contre illustre le cas $n = 5$.



Calculer en fonction de n :

- a) le nombre de points de contact entre deux disques ;
- b) le nombre de régions (blanches) entourées par des disques ;
- c) l'aire totale de ces régions.

2. (20 pts) Dix nombres naturels distincts deux à deux doivent satisfaire aux conditions suivantes :

- La moyenne arithmétique des six plus petits nombres est égale à 5 ;
 - La moyenne arithmétique des six plus grands nombres est égale à 15.
- a) Le plus petit de ces dix naturels peut-il être égal à 2 ?
 - b) Le plus petit de ces dix naturels peut-il être égal à 3 ?
 - c) La moyenne arithmétique de ces dix naturels peut-elle être égale à 11 ?
 - d) Sous les conditions de l'énoncé, quelle est la plus grande valeur que peut prendre la moyenne arithmétique de ces dix naturels ?

Suite au verso

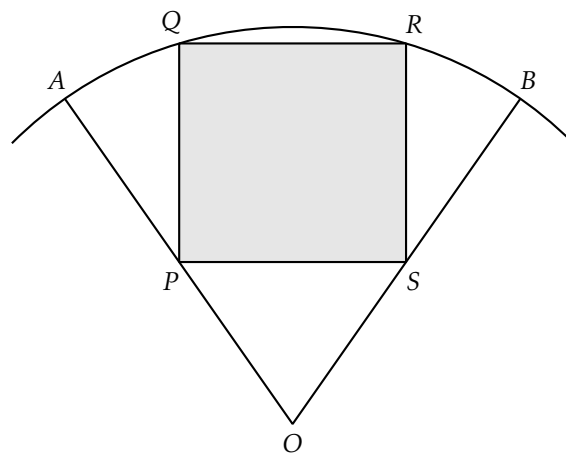


3. (20 pts)

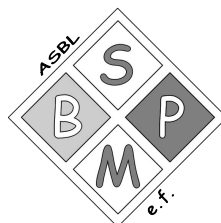
a) Que vaut $\sqrt{111111 - 222}$?

b) Que vaut $\sqrt{\underbrace{111\dots 1}_{4050 \text{ chiffres } 1} - \underbrace{222\dots 2}_{2025 \text{ chiffres } 2}}$?

4. (20 pts) Comme illustré dans la figure ci-dessous, A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon 5, avec $|AB| = 6$; le carré $PQRS$ est inscrit dans le secteur circulaire OAB avec $P \in [OA]$, $S \in [OB]$ tels que $|OP| = |OS|$ et $Q \in \widehat{AB}$, $R \in \widehat{AB}$. Quelle est l'aire du carré $PQRS$?



Une organisation de la





CINQUANTIÈME OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE MAXI FINALE 2025

Mercredi 2 avril 2025

*Prière de répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Chaque réponse doit être soigneusement justifiée !*

1. (20 pts) Pour quels chiffres x et y le nombre de la forme $\overline{30x0y03}$ est-il multiple de 13 ?
Donner tous les couples $(x; y)$ de solutions.

2. (20 pts) Tous les élèves d'une classe sont de tailles différentes. Leur instituteur veut les placer en une file indienne dans laquelle ils sont d'abord placés dans un ordre de tailles croissantes puis, ensuite, dans un ordre de tailles décroissantes. Il admet aussi les files uniquement croissantes ou uniquement décroissantes. Combien existe-t-il de telles files si le nombre d'élèves est

- a) 3 ?
- b) 4 ?
- c) un naturel non nul n quelconque ?



Exemple d'une file admise.



Exemple d'une file non admise.

3. (20 pts) Déterminer tous les couples $(x; y)$ de nombres entiers tels que $x + y = x^2 - xy + y^2$.

4. (20 pts) On donne le triangle acutangle ABC . Les points B' et C' sont les symétriques respectifs de B et C par rapport aux droites AC et AB et le point P , distinct de A , est l'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABB' et ACC' . Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC appartient à la droite AP .

Une organisation de la

